



N° : 3772

## THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Par **PICART, Delphine**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : Mathématiques et Informatique

### MODÉLISATION ET ESTIMATION DES PARAMÈTRES LIÉS AU SUCCÈS REPRODUCTEUR D'UN RAVAGEUR DE LA VIGNE (*Lobesia botrana* DEN. & SCHIFF.)

Thèse dirigée par AINSEBA, Bedr'Eddine et co-dirigée par NOUSSAIR, Ahmed

Soutenue le : 12 février 2009

Devant la commission d'examen formée de :

Éric Wanjberg (Président)	Directeur de recherche	INRA Sophia Antipolis
Fabio Milner (rapporteur)	Professeur	Université d'Arizona
Jean Pierre Yvon (rapporteur)	Professeur	INSA de Rennes
Denis Thiéry	Chargé de recherche	INRA Bordeaux
Jacques Henry	Directeur de recherche	INRIA Sud Ouest
Bedr'Eddine Ainseba	Professeur	Université Bordeaux 1
Ahmed Noussair	Maître de conférence	Université Bordeaux 1



A mes parents...



A Romain...



---

## Remerciements

J'ai envie d'adresser ces premières lignes de mon manuscrit à toutes les personnes de ma famille et de mon entourage qui m'ont soutenue tout au long de cette thèse. Bien sûr je n'oublie pas de remercier Bedr'Eddine pour m'avoir transmis ses connaissances des mathématiques, mais aussi pour m'avoir écoutée et conseillée dans mon travail. Mes remerciements s'adressent aussi à Denis pour sa sincérité et pour nos longues discussions qui m'ont beaucoup aidée dans l'avancement de mes travaux de recherche mais surtout qui m'ont fait découvrir une envie de travailler dans le domaine de la biologie. Je remercie Jacques pour m'avoir aidée à sortir des périodes difficiles et pour avoir suivi et proposé des idées innovantes pour mon travail.

Merci aux rapporteurs, Fabio et Jean Pierre, d'avoir accepté de lire ce travail et de l'avoir apprécié. Merci à tous les membres du jury de s'être déplacés parfois d'assez loin pour assister à la soutenance et pour avoir précisé leur intérêt pour ce sujet et leur gentillesse.

Mais je souhaite insister ici pour remercier les personnes qui me sont les plus chères. Et je commencerai par Romain, la personne qui partage mon quotidien et qui a enduré les nombreuses baisses de moral. Romain a su trouver les bon mots pour m'encourager et surtout ne pas abandonner... Je pense ensuite à mes parents qui ne m'ont pas beaucoup vue ces trois dernières années. Je remercie ma belle famille, Christine, Maxime et Roland pour m'avoir accueillie et soutenue. Je remercie Julien pour les moments de complicité, de rigolade et surtout son aide pour la préparation et le suivi des expériences, et aussi Lionel pour m'avoir donné de précieuses données expérimentales. Je remercie mes amis et en particulier Béa, Clarisse, Guillaume, Ingrid, Jean, Jessie, Paul, Pic, Pierre, Quéqué, Sandra, Vincent pour leurs messages de soutien et de réconfort.

Merci à toutes les personnes de l'UFR Sciences et Modélisation et de l'UMR Santé Végétale de m'avoir accueilli, écouté et encouragé pendant ces années.

Je remercie la Région Aquitaine et les organismes de recherche, l'INRIA et l'INRA, pour avoir financé ce projet de thèse qui a duré un peu plus de trois ans.

Enfin ces dernières lignes sont adressées aux personnes que j'ai vu partir ces trois dernières années laissant un grand vide mais gardant une place importante dans mes pensées.

Merci à tous...



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>12</b>
<b>1 Caractérisation de la dynamique des populations de l'Eudémis de la vigne.</b>	<b>17</b>
1.1 Les dégâts causés par l'Eudémis de la vigne.	18
1.2 Description du cycle biologique.	19
1.2.1 Le papillon.	20
1.2.2 L'oeuf.	24
1.2.3 La Larve.	25
1.2.4 La chrysalide.	27
1.3 Prévision de la dynamique des populations.	27
1.4 Les moyens de lutte.	29
1.4.1 Les produits phytosanitaires.	29
1.4.2 La confusion sexuelle.	29
1.4.3 <i>Bacillus thuringiensis</i> (BT).	29
1.4.4 La lutte biologique.	30
1.5 Nos hypothèses biologiques.	30
<b>2 Les modèles mathématiques en dynamique des populations d'insectes.</b>	<b>33</b>
2.1 Les premiers modèles	33
2.2 Les modèles structurés.	34
2.2.1 Les modèles déterministes en âge chronologique.	34
2.2.2 Les modèles déterministes en âge physiologique.	36
2.2.3 D'autres modèles	38
2.3 Les modèles Eudémis.	38
2.3.1 Le modèle EVA.	38
2.3.2 Le modèle d'ACTA.	39
2.3.3 Le modèle Brière	40
2.4 Les objectifs de notre modèle.	41
<b>I Modélisation de la dynamique des populations de l'Eudémis de la vigne et étude mathématique du modèle.</b>	<b>43</b>
<b>3 Modélisation de la dynamique des populations de l'Eudémis de la vigne.</b>	<b>45</b>
3.1 Modélisation de la croissance d'une population quelconque.	45
3.2 Modélisation de la croissance d'une population Eudémis : deux modèles différents.	46

3.2.1	Modèle dérivant du modèle Von Forster-McKendrick. . . . .	46
3.2.2	Modèle Méta-population. . . . .	47
3.2.3	Choix du modèle. . . . .	48
3.3	Le modèle <i>Lobesia botrana</i> annuel. . . . .	49
3.4	Le modèle <i>Lobesia botrana</i> pluriannuel. . . . .	50
<b>4</b>	<b>Analyse mathématique du modèle <i>Lobesia botrana</i>.</b>	<b>53</b>
<b>5</b>	<b>Analyse numérique du modèle <i>Lobesia botrana</i>.</b>	<b>59</b>
5.1	Construction du schéma numérique. . . . .	60
5.2	Analyse du schéma numérique. . . . .	61
5.3	Convergence $L^1$ du schéma VF. . . . .	68
5.4	Continuité des schémas par rapport aux paramètres. . . . .	70
<b>II</b>	<b>Estimation des paramètres du modèle <i>Lobesia botrana</i>.</b>	<b>73</b>
<b>6</b>	<b>Estimation du taux d'éclosion.</b>	<b>77</b>
6.1	Formulation du problème d'estimation. . . . .	77
6.2	Résolution du problème d'estimation. . . . .	79
6.3	Le problème discret. . . . .	80
6.3.1	Résolution du problème discret. . . . .	82
6.3.2	Algorithme de résolution. . . . .	90
6.3.3	Résultats numériques. . . . .	90
6.4	Régularisation de la solution. . . . .	93
6.5	Estimation du taux d'éclosion pour une dynamique d'éclosion expérimentale. . .	97
6.6	Application aux données expérimentales. . . . .	99
6.7	Modification du problème d'estimation. . . . .	101
6.7.1	Formulation et résolution du problème d'estimation. . . . .	104
6.7.2	Le problème discret. . . . .	106
6.7.3	Résultats numériques. . . . .	108
<b>7</b>	<b>Estimation du taux d'émergence</b>	<b>111</b>
7.1	Formulation du problème d'estimation. . . . .	111
7.2	Résolution du problème d'estimation continu. . . . .	113
7.3	Le problème discret. . . . .	115
7.3.1	Résolution du problème discret . . . . .	116
7.3.2	Résultats numériques. . . . .	118
7.4	Régularisation de la solution. . . . .	120
7.4.1	Estimation des taux de passage pour une dynamique d'émergence expérimentale. . . . .	123
7.4.2	Estimation du taux d'émergence pour une dynamique d'émergence expérimentale. . . . .	125
7.5	Application à des données expérimentales. . . . .	127
7.6	Estimation des taux d'émergence mâle et femelle. . . . .	129

7.6.1	Structuration de la population au stade larve. . . . .	129
7.6.2	Structuration de la population au stade papillon. . . . .	132
<b>8</b>	<b>Estimation du taux de ponte.</b>	<b>137</b>
8.1	Formulation et résolution du problème d'estimation. . . . .	138
8.2	Le problème discret. . . . .	138
8.2.1	Résultats numériques. . . . .	139
8.3	Application aux données expérimentales. . . . .	141
<b>9</b>	<b>Estimation des taux de mortalité.</b>	<b>143</b>
9.1	Formulation et résolution du problème d'estimation. . . . .	147
9.2	Résultats numériques. . . . .	152
<b>III</b>	<b>Etude biologique avec le modèle <i>Lobesia botrana</i>.</b>	<b>155</b>
<b>10</b>	<b>Effet thermique sur le développement larvaire et modélisation.</b>	<b>157</b>
10.1	Durées de développement à température constante. . . . .	157
10.2	Effet thermique sur le développement larvaire. . . . .	159
10.2.1	Matériels et méthodes. . . . .	159
10.2.2	Résultats et conclusions. . . . .	160
10.3	Modélisation du développement larvaire en fonction de la température et simulations. . . . .	161
10.3.1	Modélisation du développement larvaire en fonction de la température. . . . .	162
10.3.2	Application à des données expérimentales. . . . .	163
10.3.3	Résultats et conclusions. . . . .	164
<b>11</b>	<b>Étude de la dynamique de ponte chez l'Eudémis de la vigne.</b>	<b>167</b>
11.1	Caractérisation de la dynamique de ponte. . . . .	167
11.1.1	Matériels et méthodes . . . . .	167
11.1.2	Résultats et conclusions. . . . .	168
11.1.3	Annexe . . . . .	173
11.2	Étude de l'impact de scénarios climatiques sur la dynamique de ponte. . . . .	180
11.2.1	Résultats et conclusion. . . . .	182
<b>IV</b>	<b>Contrôle des populations d'Eudémis de la vigne.</b>	<b>185</b>
<b>12</b>	<b>Contrôle des populations Eudémis à partir des pontes.</b>	<b>189</b>
12.1	Formulation et résolution du problème de contrôle. . . . .	189
12.2	Étude numérique du problème de contrôle. . . . .	194
12.2.1	Résultats numériques. . . . .	198
<b>13</b>	<b>Contrôle des populations Eudémis à partir des oeufs.</b>	<b>203</b>
13.1	Résolution du problème de contrôle. . . . .	204
13.2	Étude numérique du problème de contrôle. . . . .	205
13.3	Résultats numériques. . . . .	208

<b>14 Contrôle des populations Eudémis à partir des accouplements.</b>	<b>211</b>
14.1 Formulation et résolution du problème de contrôle. . . . .	211
14.2 Résultats numériques. . . . .	213
<b>15 Conclusions et Perspectives</b>	<b>217</b>
15.1 Conclusions. . . . .	218
15.2 Perspectives. . . . .	220
<b>Références bibliographiques</b>	<b>223</b>

# Introduction

L'étude réalisée dans cette thèse s'inscrit dans le domaine des mathématiques et dans celui de la biologie. L'enjeu de ce travail de recherche est de répondre à des questions biologiques actuelles tout en satisfaisant les contraintes d'une thèse en mathématique appliquée. Nous tentons d'apporter dans cette thèse une réflexion sur quelques problématiques de recherche dans ces deux disciplines.

L'objectif est de modéliser la dynamique des populations d'un insecte ravageur de la vigne, l'Eudémis de la vigne (*Lobesia botrana*). La biologie et les comportements de cet insecte sont depuis longtemps étudiés à l'Institut National de la Recherche Agronomique (INRA), basé à Villenave d'Ornon, afin d'élaborer des méthodes de lutte. Le nombre important de données expérimentales accumulées depuis ces années de recherche sur cet insecte constitue un argument pour apporter nos connaissances mathématiques à l'étude de ces populations. D'après Caselli et al. (2005), la théorie générale de la dynamique des populations est apparue au XXème siècle avec les travaux de Lotka. En démographie, la dynamique d'une population est l'évolution par unité de temps et d'espace de la taille de cette population. Le développement de cette population est étroitement lié à l'environnement dans lequel elle évolue. Dans un environnement où la quantité de ressource alimentaire n'est pas limitée et où les conditions de vie sont prévisibles, la dynamique temporelle de la population, qui est décrite par la courbe bleue de la figure 1, évolue vers un seuil fixé par les conditions du milieu. Dans cette situation, la population adopte une stratégie d'évolution de type K c'est à dire qu'elle produit peu de descendants et s'investit dans sa survie jusqu'à l'âge de la maturité. La courbe rouge représente la dynamique d'une population au cours du temps évoluant dans un environnement fluctuant. L'approvisionnement en ressources vitales est, dans un milieu fluctuant, imprévisible et les risques de mortalité sont élevés. Dans ce cas, la population suit une stratégie de type r, c'est à dire qu'elle produit beaucoup de descendants dont les chances de survie jusqu'à la maturité sont faibles (Pianka, 1972).

Concernant la population d'Eudémis, la ressource alimentaire n'est pas un facteur limitant pour le développement de sa population mais la synchronisation entre la ponte des femelles et la maturité de la vigne est déterminante pour la survie des chenilles. Les variations climatiques et environnementales sont des éléments qui perturbent le comportement de ponte des femelles mais aussi la croissance de l'insecte. Les populations Eudémis adoptent alors une stratégie qui évolue en fonction des circonstances. Avec la collaboration de Denis Thiéry, chercheur à l'INRA, on étudie l'influence des différents comportements de l'insecte ainsi que ses choix de plantes reproductrices sur la dynamique temporelle des populations de ce ravageur, afin de progresser dans les stratégies de lutte.

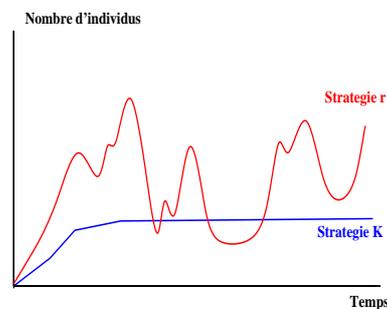


FIG. 1: Exemples de dynamiques temporelles d'une population animale évoluant dans un milieu donné. Pour un environnement constant, la population adopte une stratégie de type K (courbe rouge). Pour un environnement fluctuant, la population adopte une stratégie de type r (courbe bleue).

La dynamique des populations est évaluée selon plusieurs critères qui sont liés à la structure de cette population, à son effectif, à ses fluctuations ou encore aux causes des modifications d'abondance. Les techniques utilisées pour déterminer ces critères sont en général expérimentales comme par exemple le comptage direct, l'échantillonnage ou la capture. La modélisation mathématique est un outil permettant de comprendre l'évolution de ces populations. C'est une technique consistant à formaliser un système complexe en une ou plusieurs équations mathématiques. L'un des avantages de cet outil c'est qu'il permet d'étudier des questions biologiques parfois difficiles à réaliser expérimentalement, ainsi que d'obtenir des résultats numériques dans un laps de temps plus court que celui d'une expérience. Le principal défaut d'un modèle mathématique est que sa performance, c'est à dire l'exactitude à prédire la dynamique des populations, repose sur l'utilisation d'un ensemble de données expérimentales, permettant sa paramétrisation.

Dans cette thèse, on développe un modèle mathématique pour l'étude et la compréhension de la dynamique des populations de l'Eudémis de la vigne. La première étape consiste à caractériser les variations numériques et temporelles des populations de ce ravageur en fonction d'un nombre fini de paramètres biologiques. Les hypothèses biologiques que nous aurons formulées seront dans la première partie de la thèse mises en équations. Dans cette même partie, on proposera une analyse mathématique et numérique du modèle appelé *Lobesia botrana*. Les données expérimentales, obtenues pour la plupart par Denis Thiéry, seront exploitées pour paramétrer les fonctions démographiques constituant le modèle mathématique. Le paramétrage du modèle est réalisé dans la troisième partie de cette thèse et correspond, avec la modélisation, à la partie mathématique de cette thèse. Enfin, la dernière phase est dédiée à l'évaluation du modèle c'est à dire que le modèle mathématique paramétré est testé sur des questions biologiques actuelles. Ce travail est présenté dans les troisième et quatrième parties. La thèse a été co-financée par la Région Aquitaine et l'Institut National de la Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA). Le travail a été réalisé au sein de l'équipe ANUBIS d'INRIA Sud Ouest et en collaboration étroite avec l'équipe d'entomologie de l'UMR Santé Végétale 1065 (Institut de la Vigne et du Vin) IFR 103 de l'INRA basé à Villenave d'Ornon. Mes simulations sont réalisées à partir de données fournies par l'UMR 1065 ou acquises par Denis Thiéry dans le cadre de cet accueil.



## Chapitre 1

# Caractérisation de la dynamique des populations de l'Eudémis de la vigne.

Les insectes causant le plus de dégâts sur vignes en Europe sont Eudémis, *Lobesia botrana* Den. & Schiff., Cochyliis, *Eupoecilia ambiguella* Hübner, Eulia, *Argyrotaenia pulchellana* Haw., Pyrale, *Sparganothis pilleriana* Den. & Schiff. Ce sont des Lépidoptères appartenant à la classe des Hétérocères. Ces "papillons de nuit" s'inscrivent dans la famille des Tortricidae. Comme tous les insectes, ces espèces sont poikilothermes c'est à dire que leur croissance est régulée par la température de l'environnement. Elles sont capables de se développer aux dépens de plusieurs espèces de plantes (espèces polyphages), et de se reproduire plusieurs fois dans l'année (espèces polyvoltines).

L'Eudémis est celui qui a reçu le plus d'attention parmi tous ces ravageurs. Il existe de nombreux ouvrages anciens détaillant déjà ses comportements et ses préférences géographiques. Ce petit papillon a été découvert par Schiffermüller et Denis en Autriche dans les années 1775. Depuis, on a accumulé d'importants jeux de données expérimentales mais aussi d'articles scientifiques sur la dynamique de ces populations.

Ce ravageur est présent sur la plupart des vignobles Européens mais aussi en Afrique du nord, au Proche Orient, en Asie mineure, ou encore au Caucase. Globalement, ce ravageur des vignes se trouve dans des zones chaudes et sèches.



FIG. 1.1: Chenille sur une grappe avant floraison et chenille sur une jeune grappe (photos INRA).

## 1.1 Les dégâts causés par l'Eudémis de la vigne.

On différencie deux sortes de dégâts, ceux dits directs et ceux dits indirects. Les dégâts directs sont commis par les chenilles. La larve de 1ère génération se glisse entre 2 ou 3 boutons floraux qu'elle réunit avec du fil de soie (Fig 1.1). Elle perce ensuite les enveloppes florales et pénètre dans le bouton. Elle s'introduit parfois dans le pédoncule de la grappe et provoque le dessèchement de celui-ci. Les chenilles des générations ultérieures se développent aux dépens des grains de raisin. Elles en rassemblent plusieurs à l'aide de fils de soie puis les mordillent ou pénètrent à l'intérieur (Fig 1.1).

Les morsures ou perforations des chenilles favorisent l'installation du champignon *Botrytis cinerea*, agent de la pourriture grise. Les chenilles peuvent propager les spores de *Botrytis cinerea*, mais comme ses déplacements sont limités sur un cep de vigne (Torres-Vila et al., 1997), elles ne contaminent que les baies de raisin sur lesquelles elles sont installées. D'autres dégâts peuvent survenir en fin d'été et avant la vendange. Par exemple, les drosophiles profitent des perforations des chenilles pour pondre à l'intérieur des baies de raisin, ce qui provoque la pourriture acide.



FIG. 1.2: Dégâts directs (photos du haut) et indirects (photos du bas) sur raisin. La photo en bas à droite est une illustration de l'installation du champignon *Botrytis cinerea* sur grappe (photos INRA).

Les grains attaqués brunissent à l'endroit lésé et pourrissent (Fig 1.2). La présence de larves et de grains pourris déprécie la qualité du raisin. Les moisissures rendent la vinification difficile ce qui oblige parfois à vendanger précocement. Selon leur importance, les dégâts causés par ces ravageurs peuvent entraîner des baisses de rendement et de qualité aussi bien pour le raisin de table que pour celui de cuve.

## 1.2 Description du cycle biologique.

Ce paragraphe a pour objectif de préciser quelques généralités importantes pour notre travail. Sauf références bibliographiques spécifiques, la description du cycle de l'Eudémis repose sur les synthèses suivantes : Roehrich et Boller, 1991 ; Thiéry, 2005 et 2008 ; Thiéry et al. 2005, 2006 ; Moreau et al., 2006.

Le cycle biologique présente quatre stades de développement distincts, ou stades de croissance, qui sont l'oeuf, la larve ou "chenille", la nymphe ou "chrysalide", l'adulte ou "papillon" (Fig. 11.1). Selon la latitude, ce cycle est répété de deux à quatre fois dans l'année (Roditakis et al., 2001).

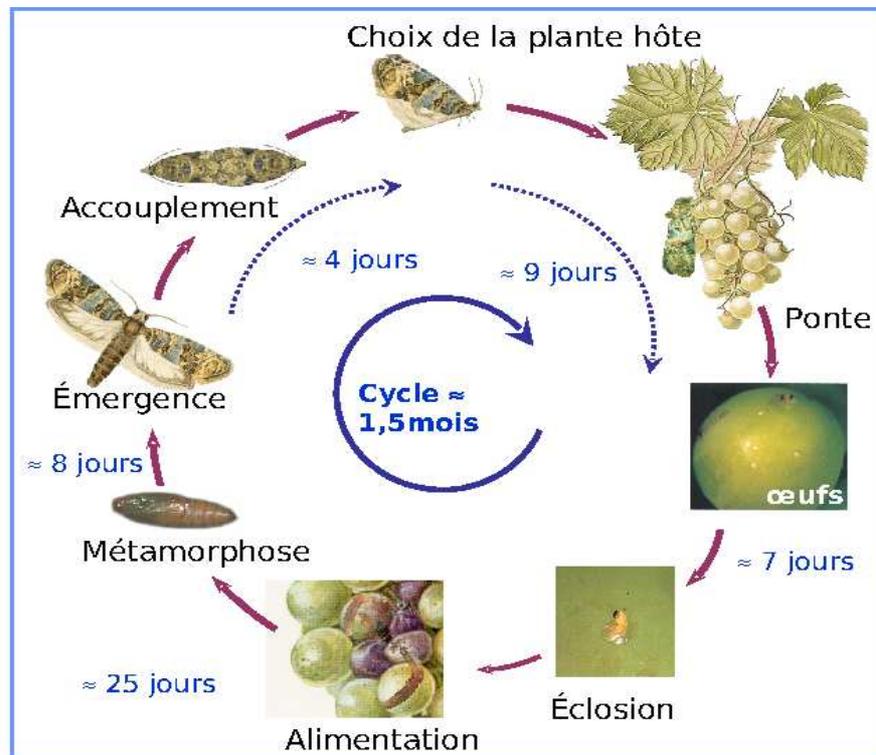


FIG. 1.3: Le cycle biologique de l'Eudémis est décomposée en 4 stades qui sont l'oeuf, la larve, la chrysalide et le papillon. La durée de ce cycle est d'environ 1 mois et demi selon le climat et la latitude (Image N. Maher).

Le nombre de cycles sur une année varie en fonction de la longueur du jour, la photopériode (El Bahi 1990). La durée de la première génération est d'environ deux mois en Aquitaine, celles des générations deux et trois durent en moyenne en peu plus d'un mois. On désignera par G1 le cycle du printemps, par G2 celui de juillet et par G3 celui du mois d'août. Pendant l'hiver, l'insecte reste au stade chrysalide. Cette période est la diapause.



FIG. 1.4: Cycle annuel de l'Eudémis. Les abréviations  $G_n$  désignent la génération de l'Eudémis dans l'année. La diapause est la période hivernale du développement de l'insecte (Image INRA - D. Thiéry).

La durée de développement est le temps nécessaire pour devenir un adulte. Le développement de l'insecte est terminé dès l'émergence du papillon. On peut parler de durée de développement pour un stade. Dans ce cas, on mesure, en général en jours, le temps nécessaire pour accomplir ce stade. La somme des temps de développement de chaque stade donne la durée de croissance de l'insecte.

### 1.2.1 Le papillon.

L'adulte mesure environ 6 mm de long et possède une envergure de 18 à 20 mm. Les ailes antérieures sont gris perle, parsemées de petites zones brun rougeâtre. Les ailes postérieures grisâtres, avec une zone marginale plus foncée, sont bordées de soies grises.



FIG. 1.5: Papillon sur vigne (photo INRA).

### L'émergence.

C'est la sortie du papillon de sa chrysalide. Elle est initiée dès que le cocon a reçu une quantité d'énergie thermique suffisante (Roehrich et al., 1989). L'émergence a lieu au début de la photophase c'est à dire durant les 5 premières heures et plus généralement le matin (Thiéry, communication personnelle).

Le vol de première génération débute vers la mi-avril dans le sud ouest et un peu plus tard en Bourgogne et en Alsace. Le deuxième vol a lieu fin juin-courant juillet en Aquitaine et le troisième vol se produit entre la mi-août et la fin septembre. La figure 1.6 illustre la période de vol des différentes générations d'Eudémis dans un vignoble de la commune de Gaillac (département du Tarn). Ces courbes sont le résultat, en pourcentage, de données de pièges sexuels sur 3 années consécutives : 2002, 2003 et 2004. D'une année sur l'autre le pic d'émergence et la durée du vol varient à chaque génération.

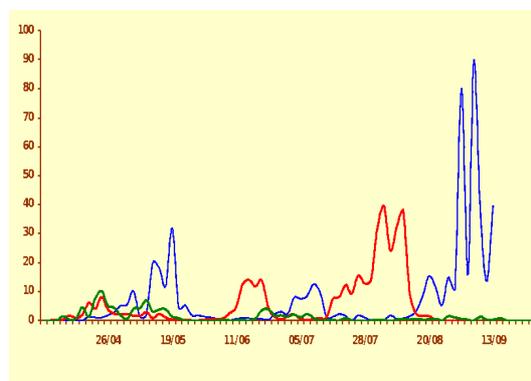


FIG. 1.6: Captures au piège sexuel d'Eudémis de la vigne en vignoble de Gaillac durant 3 années consécutives (2002, 2003, 2004). Ces courbes montrent les différences entre les dates de pics de capture et le nombre de papillons piégés surtout (Données B. Bourgouin et B. Herlemont).

La dynamique d'émergence de la G1 dure entre 4 à 6 semaines à partir du mois d'avril dans le sud ouest. Cet étalement dépend de la durée du stade chrysalide pendant la phase hivernale qui est affectée par la température et la photopériode (Roditakis et al. 2001). L'initialisation et la durée du deuxième vol sont conditionnées par la dynamique des individus de première génération (El Bahi, 1990). Les conditions climatiques mais aussi la qualité du cépage font varier la durée des dynamiques d'émergence (Moreau et al., 2006). Par exemple, la dynamique de vol d'adultes alimentés en chardonnay est plus étalée dans le temps et commence plus tôt que celle d'individus nourris en pinot noir (Fig. 1.7).

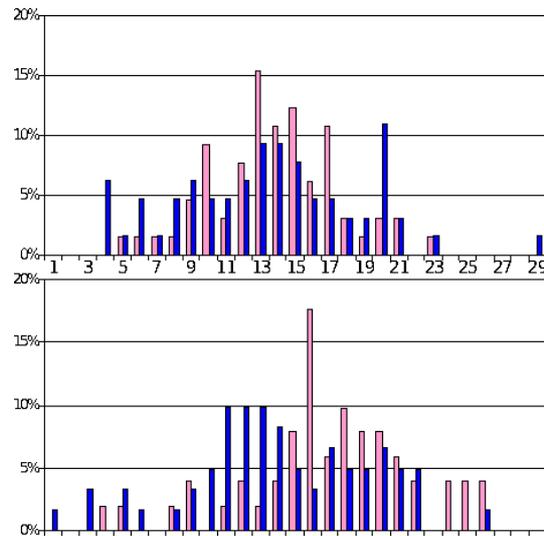


FIG. 1.7: *Dynamiques temporelles d'émergence des mâles (bleu) et des femelles (rose) à partir d'oeufs pondus à une même date sur deux cépages (pinot noir en haut et chardonnay en bas). Données D. Thiéry non publiées.*

Des différences sur les dates d'émergence existent entre le mâle et la femelle. La "protandrie", ou "proterandrie" est globalement de 2 jours mais peut varier de quelques jours en fonction du cépage sur lequel l'insecte se développe (Thiéry et al. , 2006). Par exemple, cette différence est d'un jour sur pinot noir et de 3 jours sur Chardonnay (Fig. 1.7).

### Alimentation et durée de vie.

La durée de vie moyenne des femelles sauvages est de 10 jours (Touzeau, 1979). D'après les résultats de Torres-Vila (1999) les mâles ont une longévité de quelques jours plus longue que celle des femelles. Pour les deux sexes, la longévité varie en fonction de la température et de l'alimentation de la chenille. L'été, la durée de vie peut être raccourcie de presque 4 jours selon les données de Chavent (1983). Le stade phénologique affecte la longévité des adultes (Torres-Vila et al., 1999). La vie des adultes est allongée de 5 jours pour les femelles et de 8 jours pour les mâles sur une vigne au stade grappe mûre que sur une vigne au stade inflorescence. Les femelles en buvant de l'eau augmentent leur durée de vie de 15 à 20% (Thiéry, 2005). On pense que l'allongement de la vie des femelles va favoriser les déplacements et la dispersion des pontes.

### L'accouplement.

Dès leur émergence, les Eudémis sont prêts à s'accoupler. Cette activité a lieu au crépuscule et en début de nuit, mais peut être avancée en cas d'obscurité ou d'orage (Hurtrel et Thiéry, 1999). Les femelles attirent les mâles en émettant une phéromone sexuelle (Thiéry, 2005). Elles peuvent s'accoupler plusieurs fois avec des mâles différents mais deviennent moins attirantes pour les mâles comparé aux femelles vierges (Schmitz, 1992). Un mâle peut s'accoupler avec 8 femelles (Torres-Vila, 1999). Un seul accouplement suffit à fertiliser la grande majorité des ovocytes d'une femelle. Moreau et al. (2006) mesurent au laboratoire un taux d'accouplement variant de 68% à 84% en fonction de la nourriture qu'a reçu la larve.



FIG. 1.8: Accouplement d'adultes *Cochylis* (D. Thiéry). Les Eudémis adoptent la même posture.

### La ponte.

Elle commence le lendemain de l'accouplement si les conditions climatiques le permettent (Maher, 2002). La préoviposition, la période entre l'accouplement et la première ponte, varie en fonction du cépage sur lequel l'individu a grandi. La fécondité moyenne d'une femelle sauvage est d'environ cent oeufs qu'elle pond sur une semaine. La quantité d'oeufs et l'étalement de la ponte sont variables avec le cépage (Thiéry et Moreau, 2005 ; Moreau et al. 2006) et le stade phénologique de la plante (Torres-Vila et al, 1999). Le taux de fécondité est positivement corrélé avec le poids des femelles (Torres-Vila et al., 1999). Les accouplements successifs allongent la période de ponte. Les femelles non accouplées ne pondent pas.

Les femelles Eudémis déposent leurs oeufs, un à un, sur les organes fructifères ou les baies de raisin. En cas d'émergence précoce au printemps, la femelle peut être amenée à pondre sur des surfaces lisses comme les piquets ou les bois des coursons. Le risque alors pour la descendance est de ne pas trouver de nourriture pour s'alimenter. La femelle recherche le meilleur site pour le développement de sa descendance (Maher, 2002). Le goût de la cuticule végétale guide le choix du lieu de ponte (Maher et Thiéry, 2004 ; Maher et al. 2006). Après chaque dépôt d'oeuf, la femelle s'envole mais il arrive qu'elle marche entre deux actes de ponte. Ce comportement de ponte participe ainsi à la dispersion des oeufs. La femelle Eudémis recherche des zones plutôt sèches et chaudes. Elle ne pond pas sur les surfaces mouillées. L'orage ou une faible luminosité avancent l'heure de sa ponte. Ce décalage de quelques heures n'a pas de conséquences importantes sur la dynamique des populations mais peut en avoir si ce temps se répète sur plusieurs jours. La compacité de la grappe, mais aussi l'exposition de la vigne (Zahavi et al., 2003) influencent le comportement de ponte de la femelle.

Une trentaine de plantes peuvent être des hôtes de l'Eudémis (Thiéry, 2008). Ce sont des plantes qui permettent à la fois la ponte de la femelle et l'alimentation de la chenille. Ces plantes sont par exemple la vigne, le garou (*Daphne gnidium*), plante sauvage très commune du Midi de la France, le lierre, le troène, le cassissier, le groseillier.

### Seuil thermique.

En dessous d'une température limite, le seuil thermique, le papillon peut s'arrêter de voler. Par conséquent, la rencontre des adultes n'a pas lieu et les femelles déjà accouplées bloquent leur ponte. L'entomologiste Allemand Götz (1941) a décrit un seuil thermique de vol au moins égal à 14°C avec un maximum à 31°C. Le chercheur R. Roerich attachait des femelles vierges en vignoble et les retrouvait accouplées le matin alors qu'il faisait moins de 12°C le soir. L'activité crépusculaire des adultes est maintenue pour une température voisine de 12°C (cité dans Thiéry 2008).

Familles	Noms vernaculaires / latins	
Actinidiaceae	Kiwi ( <i>Actinidia chinensis</i> )	
Asteraceae	Achillée millefeuille ( <i>Achillea millefolium</i> )	T
Berberideae	Berberis ( <i>Berberis sp.</i> )	T
Caprifoliaceae	Chèvrefeuille d'éturie ( <i>Lonicera etrusca</i> )	T
Caprifoliaceae	Chèvrefeuille ( <i>Lonicera periclymenum</i> )	T
Caprifoliaceae	Viorne lantane ( <i>V. lantana</i> )	T
Caryophyllaceae	Œillet ( <i>Dianthus sp.</i> )	T
Cornaceae	Cornouiller mâle ( <i>Cornus mas</i> )	T
Cornaceae	Cornouiller sanguin ( <i>C. sanguineum</i> )	T
Discoridaceae	Tamier ( <i>Tamus communis</i> )	T
Ericaceae	Arbousier ( <i>Arbutus unedo</i> )	
Fabaceae	Luzerne ( <i>Medicago sativa</i> )	T
Fabaceae	Trèfle des prés ( <i>Trifolium partensis</i> )	T
Grossulariaceae	Groseillier ( <i>Ribes rubrum</i> )	T
Grossulariaceae	Cassissier ( <i>Ribes nigrum</i> )	T
Labiaceae	Romarin ( <i>Rosemarinus officinalis</i> )	T
Liliaceae	<i>Drimia maritima</i>	T
Liliaceae	<i>Scilla sp.</i>	T
Oleaceae	Troène ( <i>Ligustrum vulgare</i> )	T
Oleaceae	Olivier ( <i>Olea europa</i> )	
Punicaceae	Grenade ( <i>Punica granatum</i> )	T
Ranunculaceae	Clématite flammette ( <i>Clematis flammula</i> )	T
Ranunculaceae	Clématite vigne blanche ( <i>Clematis vitalba</i> )	T
Rhamnaceae	Jujubier ( <i>Zyzyphus jujuba</i> )	T
Rosaceae	Epine noire, prunelier ( <i>Prunus spinosa</i> )	
Rosaceae	Prunier mirabelle	
Rosaceae	Prunellier	
Rosaceae	Framboisier ( <i>Rubus ideaus</i> )	
Rosaceae	<i>Mespilus germanica</i>	
Rubiaceae	Gaillet mou ou blanc ( <i>galium mollugo</i> )	T
Thymeleaceae	Garou ou saint bois, ( <i>Daphne gnidium</i> )	T
Thymeleaceae	Passerine ( <i>Passerina hirsuta</i> )	T
Vitaceae	Vignes cultivées (presque tous les cépages)	
Vitaceae	Vignes vierges ( <i>Ampelopsis et Partenocisus</i> )	
Vitaceae	Vigne sauvage (lambrusque)	

FIG. 1.9: Plantes hôtes de l'Eudémis. Certaines espèces parfois mentionnées ne sont pas reprises ici (caféier, tanaisie, pomme de terre, pommier, lierre). T indique une toxicité d'une des parties de la plante (sources : J. Bruneton; Pharmacognosie 1999) et "Poisonous plant data base" US Food and Drug Administration). D'après Thiéry 2005.

### 1.2.2 L'oeuf.

Il est de forme lenticulaire, d'un diamètre de 0.6 à 0.8 mm, et de couleur beige à reflets irisés. La taille de l'oeuf varie en fonction du cépage ou de la plante sur lesquels s'est nourrie la larve Eudémis. Il est enrobé d'un mucus de composition complexe, produit par la femelle. Ce mucus sert de protecteur contre le dessèchement.

L'oeuf se développe au cours de plusieurs phases larvaires qui sont "oeuf blanc", "oeuf jaune" et enfin "tête noire" environ 2 jours avant l'éclosion. Cette dernière est appelée ainsi car, avant l'éclosion, on commence à visualiser la capsule céphalique de la larve. Ce stade est intéressant car c'est celui auquel on se réfère souvent pour positionner les traitements insecticides contre l'Eudémis.

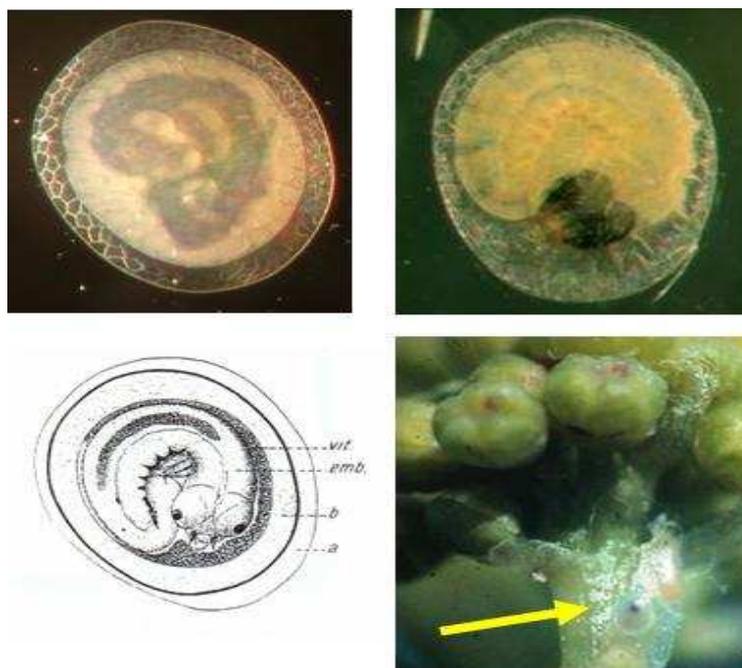


FIG. 1.10: Les photos du haut représentent le stade "oeuf jaune" (à gauche) et "tête noire" (à droite) du développement de l'oeuf. Les images du bas sont un schéma de l'embryon au stade "tête noire" et un oeuf pondu sur une jeune grappe de raisin (photos INRA).

### Fertilité des oeufs et durée de développement.

Les résultats expérimentaux d'Auroy (2006), montrent que le facteur hygrométrique a peu d'influence sur la mortalité des oeufs pour des températures comprises entre 22 et 28°C. Torres-Vila et al. (1999) mesurent un taux de fertilité de l'ordre de 90% pour des oeufs pondus sur de la vigne prise au stade inflorescence, au stade grappe verte ou au stade grappe mûre. Il ajoute que le nombre d'oeufs viables est positivement relié au poids de la femelle. Oustry soumet des populations oeufs à des coups de froids d'intensité variante (de 1 à 7h), puis les expose dans une chambre climatisée à une température de 22°C et une humidité de 65%. Il obtient le plus fort taux de survie qui est d'environ 22% pour des conditions de -8°C pendant 7h.

La durée de développement est de 6 à 9 jours pour la 1ère génération et de 4 à 6 jours pour les générations suivantes, la température étant plus élevée. Les différences de croissance dans une cohorte peuvent atteindre jusqu'à 4 jours selon les conditions climatiques (Auroy, 2006).

### 1.2.3 La Larve.

Sa tête est protégée d'une carapace très dure. C'est grâce à la taille de cette dernière que l'on peut déterminer l'âge de la larve. Elle possède des mandibules qui servent à inciser les baies de raisins. La chenille est très agile et se déplace rapidement. Elle est photosensible et donc a tendance à fuir la lumière.

Le développement de la larve se décompose en cinq stades dont chaque transition est caractérisée par une mue (elle change de "peau" et de tête). Ces stades sont appelés L1, L2 jusqu'à L5. La larve mesure au maximum 8 à 9 mm, elle passe d'une couleur vert jaune à vert gris, la tête et plaque thoracique sont jaunes bruns.



FIG. 1.11: Capsule céphalique d'une chenille *Eudémis* dont la largeur permet de préciser l'âge de l'insecte au stade larve (D. Picart).

### Durée de développement.

Le développement larvaire dure en moyenne 5 semaines pour les femelles et quelques jours de moins pour les mâles. En fonction du type d'aliment dont la chenille s'est nourrie, le temps de développement peut être raccourci d'une semaine environ (Moreau et al. 2006 ; Thiéry et Moreau 2005). Autant sur vigne que sur une autre plante hôte, le stade L5 est le plus long alors que le stade L3 est le plus court. Savopopoulou-Soultani et al. (1998) ont remarqué que des baies de raisin botrytisées faisaient varier la durée de développement des chenilles comparé à des baies non botrytisées. La température affecte aussi la croissance de la chenille qui peut durer jusqu'à 10 semaines par exemple pour une température constante de 18°C (Brière, 1998). Ces conditions peuvent survenir au printemps et ainsi décaler le vol de première génération. A l'inverse, des températures chaudes vont avancer la sortie des adultes. La dynamique d'émergence, comme celles présentées sur la figure 1.5, permet de mesurer les différences de croissance entre individus nés le même jour. En fonction de l'alimentation de la chenille, l'écart entre le premier et le dernier papillon à émerger varie (données non publiées de Moreau et Thiéry). Il est, par exemple, de 26 jours et de 19 jours pour respectivement les mâles et les femelles sur pinot noir.

### Les facteurs de mortalité des larves.

A l'éclosion, la chenille perce avec sa tête le sommet de l'oeuf puis sort de celui-ci. Les premières heures qui suivent sont appelées le stade "baladeur". Pendant ce laps de temps, la L1 doit rapidement pénétrer dans le tissu végétal pour ne pas diminuer ses chances de survie. Un climat sec et chaud le jour des éclosions est fatal pour la population *Eudémis*. L'architecture de la grappe, en particulier lorsqu'elle commence à se fermer, est un facteur pouvant expliquer la différence des taux de mortalité entre les cépages (Gabel et Roehrich, 1995). Les grappes lâches rendent l'installation des chenilles difficile car celles-ci ne les protègent pas assez contre les prédateurs. La compacité de la grappe offre une meilleure cachette à la chenille de deuxième génération, mais aussi une meilleure protection contre des températures parfois extrêmes et la déshydratation. Les travaux de Gabel, Roehrich (1995) puis de Fermaud (1998) montrent que le taux de survie est plus faible sur merlot, cabernet sauvignon ou encore sauvignon en comparaison à d'autres cépages.

Torres-Vila et al. (1997) étudient le déplacement des chenilles lorsqu'elles sont mises en condition de première génération. La distance moyenne recouverte par une larve est d'environ 10 à 30 cm avec un maximum de 45cm. La distance maximale étant corrélée avec la densité d'individus présents sur les boutons floraux.

#### 1.2.4 La chrysalide.

Ce stade est caractérisé par la formation d'un cocon dans lequel la larve se transforme en un papillon. Il existe deux types de cocon, celui du printemps-été et celui d'hiver. La durée de ce stade est d'environ une semaine pendant les saisons printanière et estivale et s'étale sur environ six mois pendant l'hiver. Le poids des cocons varie selon la nourriture des chenilles. Les chrysalides se trouvent à l'intérieur de la grappe, dans les replis des feuilles sèches, sous les écorces ou les liens de paille ainsi que dans les fissures des piquets ou sous les mottes de terre.



FIG. 1.12: Chrysalide caché sous l'écorce du cep de vigne (photo Inra).

#### La diapause.

C'est la période "d'hibernation" de l'insecte. La chrysalide passe l'hiver dans son cocon et réapparaît en papillon au début du printemps. Cette phase représente un arrêt provisoire du développement de l'Eudémis. La diapause est induite par la réduction de la longueur du jour en fin d'été (Roehrich, 1969). La durée de ce stade dépend de la photopériode et de la température (Roditakis et al., 2001 ; Roehrich, 1969). Pour une photopériode de 16h, El Bahi (1990) propose une relation mathématique pour décrire la vitesse de développement du stade diapause en fonction de la température. Cette fonction est proportionnelle à la vitesse de développement des nymphes de la première génération. D'après Torres-Vila et al. (1996), les femelles effectuant une diapause ont une longévité et une fécondité élevées, cependant la fertilité des oeufs est faible. Lorsque la durée d'éclairement est supérieure ou égale à 16h, la diapause est inhibée (Roditakis et al., 2001) et la population Eudémis peut effectuer 8 à 10 générations sur une année sous ces conditions (Thiéry, 2005). Roditakis et al. ont aussi montré que la moitié de la population n'effectue pas de diapause lorsque le temps d'éclairement est inférieur à 6h et que la température est de 25°C constante. En conditions naturelles, il arrive d'observer des chenilles sur des grappes non vendangées dans le bordelais en automne (Thiéry, 2005). Les chenilles non chrysalidées subissent le froid et l'humidité, elles ont de fortes chances de sortir affaiblies de la saison d'hiver.

### 1.3 Prédiction de la dynamique des populations.

La lutte contre l'Eudémis passe par une bonne compréhension du cycle de l'insecte mais aussi par l'utilisation d'outils de prédiction. Il existe 4 méthodes qui sont les pièges alimentaires (Fig. 1.14), les pièges sexuels (Fig. 1.13), les comptages et la modélisation mathématique. Le piège sexuel nous informe sur la dynamique d'émergence des mâles alors que le piège alimentaire est destiné à prédire la dynamique de ponte. Les deux dernières méthodes permettent de quantifier et de décrire en stades la population Eudémis présente dans la parcelle de vignes. Elles sont les plus fiables pour anticiper la dynamique des populations et ainsi adapter le positionnement dans le temps des méthodes de lutte.



FIG. 1.13: *Piège sexuel. Ce piège contient une capsule diffusant la phéromone sexuelle synthétisée de la femelle. Les mâles attirés par cette odeur viennent se coller à une plaque engluée (photo Inra).*

Le principe de fonctionnement du piège sexuel est d'attirer les mâles à partir de la phéromone sexuelle émise par la femelle. Une capsule renfermant la phéromone de synthèse est placée au centre d'une plaque horizontale tapissée de glu (Fig. 10.4). Les mâles attirés par la phéromone viennent alors se coller sur la plaque et meurent. Les pièges alimentaires sont au contraire utilisés pour attirer les femelles. Le principe est de placer un liquide apprécié par la femelle dans un contenant. Celle-ci attirée par l'odeur dégagée du produit va venir se noyer dans le piège. Le comptage des adultes capturés doit être fait fréquemment afin d'avoir une idée correcte de la dynamique d'un vol. Une exposition au vent, à la pluie ou bien le froid rendent les pièges inefficaces. La mise en place dans la parcelle des pièges sexuels ou alimentaires pour la détection du premier vol de l'année est fixée à un seuil thermique expérimental de 555 degrés jours dans le Bordelais (Roehrich, 1989). Cette somme thermique est le cumul de la moyenne des températures maximales et minimales journalières au dessus de 0°C depuis le 1er février.



FIG. 1.14: *Pièges alimentaires. Les femelles sont attirées par l'odeur du liquide et se noient dedans (photos Inra).*

Les comptages s'effectuent sur les oeufs et les chenilles. Cette méthode consiste à prélever un échantillon au hasard dans la parcelle et à compter les oeufs ou les larves présentes. Le pourcentage obtenu est comparé aux valeurs établies en fonction des régions, de la destination du raisin (cuve ou table) et la méthode de culture du viticulteur (Thiéry, 2005) pour l'application d'un traitement phytosanitaire. Cette méthode est efficace mais est difficile et fastidieuse à mettre en

place.

Trois modèles mathématiques ont été développés depuis les années 1900 qui sont le modèle EVA, le modèle Brière et celui de l'institut technique ACTA. Le fonctionnement et les hypothèses biologiques modélisées sont détaillés dans le chapitre suivant.

## 1.4 Les moyens de lutte.

Les produits utilisés aujourd'hui par les viticulteurs sont des insecticides et des produits dérivant de la biotechnologie (la confusion sexuelle et la toxine de BT). Mais d'autres techniques sont étudiées par les biologistes comme par exemple la lutte biologique qui consiste à utiliser des insectes auxiliaires pour maintenir le niveau des populations du ravageur (Thiéry, 2005 ; Santenac et Thiéry, 2008).

### 1.4.1 Les produits phytosanitaires.

Ils sont utilisés pour une lutte préventive ou curative. En première génération, et selon le niveau de la population (Thiéry, 2005) une lutte curative peut être envisagée. Afin de faire chuter brutalement la taille de la population, des insecticides neurotoxiques sont appliqués pour tuer les chenilles. Ces produits ont une efficacité optimale lorsqu'ils sont répandus dans le vignoble au début de la dynamique de ponte. La lutte préventive est préconisée en 2ème et 3ème génération, en Aquitaine, afin de limiter toutes blessures favorables à l'installation du *Botrytis cinerea*. Les produits utilisés dans ce cas sont des ovicides ou des larvicides, ce sont principalement des régulateurs de croissance analogues des hormones de mue. Les premiers sont destinés à tuer les oeufs, et doivent être positionnés au moment de la ponte alors que les seconds ciblent les larves et sont appliqués au stade "tête noire". La réussite du traitement dépend du choix de la date d'intervention mais aussi de la qualité du traitement (Darrieu, 1982). Par conséquent, l'estimation de la fenêtre d'application de ces produits est très importante pour les viticulteurs.

### 1.4.2 La confusion sexuelle.

Le principe est basé sur l'utilisation de la phéromone sexuelle de synthèse émise par les femelles Eudémis. Cette méthode consiste à saturer l'environnement des insectes en phéromone sexuelle afin de désorienter un des deux partenaires, en l'occurrence le mâle. Ainsi, le nombre d'accouplement des adultes est réduit et par conséquent le nombre de chenilles aussi. Des diffuseurs (Fig 1.15) sont placés dans la parcelle de vignes à la dose de 500 diffuseurs par hectare. Ces diffuseurs renferment une dose de 1.5 ml de phéromone formulée à 70-80% et sont utilisés durant 2 voir 3 générations de l'insecte. La confusion sexuelle est efficace lorsqu'elle est pratiquée sur des grandes surfaces et d'une manière collective. Aujourd'hui, cette technique est pratiquée sur environ 1.4% de la surface viticole française (Thiéry, 2005). La raison pour laquelle cet outil n'est pas majoritairement utilisé par les viticulteurs est son prix, 0.4 euros TTC. Des recherches sont en cours pour améliorer la méthode de diffusion de la phéromone et ainsi diminuer son prix (Thiéry, 2005).

### 1.4.3 *Bacillus thuringiensis* (BT).

C'est une toxine qui tue 24 à 48h après ingestion de celle-ci les chenilles. Les produits à base de BT ont une durée d'action de 10 à 12 jours (ITV, communication 2003) et doivent être appliqués au stade "tête noire", juste avant le commencement de l'activité alimentaire de la chenille. La fenêtre d'application est très courte sachant que ce stade dure 2 à 3 jours environ.

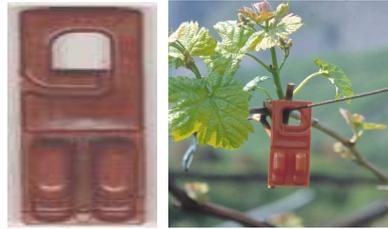


FIG. 1.15: *Diffuseur RAK2 (Luisa Mattedi)*.

Cette méthode de lutte est très dépendante des outils de prévisions. Le coût d'une lutte à l'aide de toxine BT se situe dans une fourchette de 22 à 28 euros HT par hectare. On trouvera des détails sur le mode de fonctionnement de la toxine dans le livre de Thiéry et al. (2008).

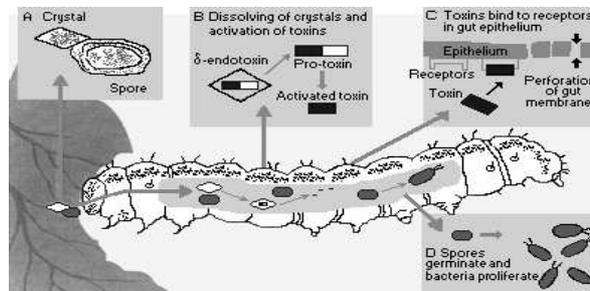


Fig. 1. Mechanism of toxicity of Bt

FIG. 1.16: *Mécanisme de toxicité de la toxine BT.*

#### 1.4.4 La lutte biologique.

Il existe de nombreux insectes, acariens, prédateurs ou parasites qui attaquent les populations d'Eudémis. Ces prédateurs sont déjà présents naturellement mais on peut favoriser leur implantation par deux méthodes différentes : la lutte par conservation ou la lutte par augmentation. La première consiste à aider les auxiliaires présents à se développer en pratiquant l'enherbement ou en plantant des haies à proximité de la vigne. Mais cette méthode ne permet pas de gérer parfaitement les populations d'Eudémis, ou du moins de faire baisser la population du ravageur suffisamment vite en cas de forte attaque. C'est pourquoi on a recours à l'application de la deuxième méthode : l'augmentation en parasitoïdes. Les chercheurs de l'INRA étudient actuellement la biologie et le comportement de trois guêpes qui parasitent les chenilles, le *Campoplex capitator* (Hymenoptera : campopleginae), *Dibrachys afinis* et *Dibrachys cavus* (Hymenoptera : pteromalidae).

### 1.5 Nos hypothèses biologiques.

On formule dans ce paragraphe les hypothèses biologiques qui nous semblent pertinentes pour l'étude et la compréhension de la dynamique des populations de notre ravageur. Les variables choisies sont qualitatives et quantitatives c'est à dire qu'elles décrivent les variations numériques au cours du temps de ces populations en fonction de sa biologie. Les données expérimentales et les méthodes de lutte développées contre cet insecte nous guident dans ce choix.



FIG. 1.17: *Dibrachys cavus*, parasitoïde généraliste qui pond dans les larves *Eudémis* juste avant qu'elles se nymphosent (Rudolf Abraham).

### Structuration de la population.

On choisit de structurer la population *Eudémis* selon les stades oeuf, larve, chrysalide, papillon mâle et papillon femelle. Ce choix est principalement guidé par la possibilité d'exploiter les données expérimentales pour la construction du modèle mathématique. Ces données correspondent aux dynamiques temporelles de la ponte des oeufs, d'éclosion des chenilles L1 et d'émergence des adultes mâles et femelles. Ces mesures informent sur la répartition en nombre d'individus et par unité de temps des populations oeuf, larve, et papillon et permettent de calculer le temps de développement des stades de croissance et la durée de vie des adultes. Plus rarement, la dynamique temporelle de début de nymphose est mesurée sur le terrain en observant les cocons de soie et permet de déterminer le temps de développement du stade larve. D'autres traits de vie sont mesurés au laboratoire et en conditions naturelles sur les oeufs, les larves, les chrysalides et les adultes comme par exemple le poids, la taille ou le taux de mortalité. Le stade chrysalide est pris en compte pour modéliser la période hivernale, la diapause. Dans le but de comprendre les données des pièges sexuels et alimentaires mais aussi de modéliser le succès reproducteur des adultes, on décompose le stade papillon en femelle et mâle.

### Les facteurs expliquant les variations temporelles et numériques.

Les différences de croissance mesurées sur des cohortes *Eudémis* soumises à des conditions climatiques constantes nous semblent un critère important pour la caractérisation de la dynamique des populations de cet insecte. Le facteur génétique est à l'origine de ces variations de développement. L'intérêt pour cette population *Eudémis* de se répartir dans le temps est par exemple de pouvoir se synchroniser avec la vigne au moment de la floraison, d'échapper à la période des vendanges ou aux facteurs de risques tels que les prédateurs ou les parasites. Les facteurs climatiques et alimentaires affectent aussi le développement de l'insecte. Généralement, seule la température est retenue par les biologistes pour modéliser la croissance de la population. Pourtant, l'alimentation des chenilles et celle des adultes modifient le développement et la reproduction de l'*Eudémis*. On choisit de modéliser le facteur génétique, alimentaire et thermique pour comprendre les variations temporelles de la dynamique des populations du ravageur. Ces mêmes facteurs sont utilisés pour expliquer les variations numériques des populations d'*Eudémis*. Par exemple, la fécondité des femelles est variable en fonction de la saison, du cépage et de l'individu. L'humidité est aussi un facteur important de mortalité. On pense qu'un air sec sur les larves L1 pendant le stade baladeur ou durant le développement des oeufs diminue fortement le nombre d'*Eudémis*. Ces conditions thermiques peuvent avoir lieu en deuxième et troisième génération d'*Eudémis* (par exemple : canicule 2003, en France) de l'année. La pluie dissuade la femelle de pondre ou perturbe la rencontre des deux sexes. Ce facteur a indirectement un impact sur la fécondité des femelles et peut expliquer localement la baisse d'individus observée sur des données de terrain. Enfin, les prédateurs et parasites de l'insecte sont aussi considérés pour caractériser les variations

numériques de la dynamique des populations.

## Chapitre 2

# Les modèles mathématiques en dynamique des populations d'insectes.

On s'intéressera ici aux modèles existants pour la modélisation de la dynamique des populations d'Eudémis mais aussi ceux utilisés pour l'étude de populations d'insectes. Après un bref rappel des premiers modèles développés dans ce domaine, on détaille essentiellement les modèles structurés. Ces derniers sont adaptés pour étudier des populations structurées comme celles de l'Eudémis car elles sont structurées en fonction des stades de développement. On donne la structure mathématique de ces modèles et les hypothèses biologiques modélisées. Notre discussion est construite en fonction des paramètres choisis pour modéliser la dynamique des populations de l'Eudémis de la vigne.

### 2.1 Les premiers modèles

Le plus connu est celui de Malthus (1798) dont l'expression mathématique est donnée par

$$N'(t) = rN(t).$$

Ce modèle raisonne en nombre d'individus et calcule l'évolution quantitative de la population  $N$  avec le taux d'accroissement  $r$ . Ce dernier est exprimé en fonction des taux moyens de natalité et de mortalité. Si  $r$  est positif alors les naissances sont plus importantes que les décès et la population croît alors que si  $r$  est négatif, on a moins de naissances que de décès et la population décroît. Ce modèle est décrit de manière continue en temps  $t$  et appartient à la famille des équations différentielles ordinaires (EDO). Il est surtout utilisé pour l'étude démographique des populations humaines (Malthus, 1798).

Verhulst (1838) va faire évoluer le modèle de Malthus en introduisant une dépendance par rapport à la densité d'individus présents à chaque instant. Pour cela, il introduit une constante  $K$  qui représente la capacité maximale du milieu à contenir une population,

$$N'(t) = aN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$

où  $a$  est une constante positive. A ce seuil  $K$ , le milieu contient assez de ressources pour maintenir la population. Au delà de ce seuil, la population diminue. L'intérêt d'ajouter  $K$  est que la solution de l'équation sera bornée alors que celle ci augmente exponentiellement dans le modèle de Malthus. Le modèle de Verhulst est appelée l'équation logistique. Un exemple d'application de ce

modèle est présenté sur l'article d'Adams et al. (2005). Il reproduit des données expérimentales obtenues sur la dynamique des populations du puceron du brocoli en fonction de la méthode de culture et des traitements insecticides.

Bien que ces modèles soient faciles à étudier mathématiquement, ils ne tiennent pas compte de la vitesse de développement de la population. Notre objectif étant de modéliser la croissance des individus constituant une population, on s'intéresse alors à une classe de modèles : les modèles structurés.

## 2.2 Les modèles structurés.

La recherche sur le développement de modèles mathématiques pour l'étude des populations structurées a commencé au XXI<sup>ème</sup> siècle avec les travaux de Leslie (1945) ou de Kermack et Mckendrick (1927). La majorité des travaux publiés traite de populations structurées par rapport aux caractères physiologiques comme l'âge, la taille ou le poids mais d'autres étudient cette population par rapport au caractère social, économique ou épidémiologique. Par exemple, le modèle de Kendall (1949) dissocie les individus célibataires de ceux en couple. Il se présente sous la forme d'un système d'EDO dont l'analyse mathématique est proposée par Haderler et al. (1988). Ce modèle a été amélioré par Hoppensteadt (1975) en ajoutant une structuration en âge.

Pour notre étude, on s'intéresse plus particulièrement aux modèles dont la structuration de la population est en rapport avec la physiologie de la population. Autrement dit, on étudie la population globale par rapport à l'âge, la taille ou encore le poids des individus. Pour chacun des cas, des modèles ont été développés. On peut citer par exemple le modèle Von Foerster-Mckendrick (1959) pour l'étude d'une population structurée en âge, le modèle de Sinko et Streifer (1967) lorsque la variable âge et la taille classifient la population, ou encore le modèle Gurtin et Mac-Camy (1974) qui prend en compte la variable âge mais aussi une dépendance par rapport à la densité de population.

On a choisi de structurer la population Eudémis par rapport aux différents stades de développement composant le cycle de l'insecte. On s'oriente alors vers les modèles dont la variable âge est prise en compte pour décrire le vieillissement de la population. Il y a deux concepts de l'âge, celui qu'on appelle chronologique et qui se rapporte à l'échelle du calendrier, et celui qu'on nomme physiologique et qui dépend du vieillissement du corps. L'emploi de l'âge chronologique est justifié dès que les effets de facteurs extérieurs comme la température ou l'alimentation sont négligés. Si ces facteurs sont pris en compte dans la modélisation, le concept d'âge physiologique doit être considéré. On présente ci-dessous les modèles structurés raisonnant sur le principe d'âge chronologique et ceux fonctionnant sur celui d'âge physiologique. On verra qu'à quelques variables mathématiques près, la structure de ces modèles est équivalente.

### 2.2.1 Les modèles déterministes en âge chronologique.

On définit la variable âge par  $a$ . On ne parle plus d'un nombre d'individus mais d'une densité d'individus appartenant à une classe d'âge  $a$  et à un instant  $t$ . Soit  $n(t, a)$  la densité d'individus au temps  $t$  et à l'âge  $a$ . Pour revenir à une notion en nombre d'individus, on fait la somme de la densité d'individus sur l'intervalle d'âge souhaité, soit  $n(t, a)\Delta a$  où  $\Delta a$  est la différence d'âge entre 2 classes successives.

Les modèles de ce paragraphe sont présentés par rapport à la valeur continue ou pas des variables temps et âge. Ainsi le modèle Von Förster-McKendrick est décrit en temps et en âge continus,

le modèle de Leslie est lui en temps et en âge discret alors que le dernier est seulement continu en la variable temps.

### Le modèle Von Förster-McKendrick (1959).

C'est une équation hyperbolique qui s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t, a) + \frac{\partial}{\partial a}n(t, a) = -\mu(t, a)n(t, a), & a \in [0, L], \\ n(t, 0) = \int_0^L \beta(t, a)n(t, a)da, \\ n(0, a) = n_0(a), \end{cases}$$

où  $\mu(t, a)$  est le taux de mortalité moyen,  $\beta(t, a)$  est le taux de fécondité moyen et  $L$  est l'âge maximal de vie. Ce modèle est généralement utilisé pour décrire une population non structurée physiologiquement (sexe, stade de développement) mais structurée en fonction de l'âge des individus. Un exemple d'application est présenté par Satake (2006) sur une population d'insectes ravageurs du thé. Ce modèle ne prend pas en compte les stades de croissance constituant le cycle biologique d'un insecte.

Le modèle de Von Förster-McKendrick admet une unique solution qui est donnée par

$$n(t, a) = \begin{cases} n_0(a-t)e^{-\int_{a-t}^a \mu(s)ds}, & a \leq t, \\ n(t-a, 0)e^{-\int_0^a \mu(s)ds}, & a \geq t, \end{cases}$$

On l'obtient à partir d'une méthode des caractéristiques (Calsina et al., 1995). La fonction exponentielle  $\Pi(a) = e^{-\int_0^a \mu(s)ds}$  correspond à la probabilité de survie à l'âge  $a$ . La solution de l'équation est continue en âge si le système vérifie les conditions de compatibilité suivantes

$$n(t=0, 0) = \int_0^\infty \beta(0, a)n_0(a)da = n_0(0) = n(0, a=0).$$

Lorsque le temps  $t$  est plus petit ou égal à l'âge maximal de vie  $L$ , la population est constituée d'individus présents initialement  $n_0$  et d'individus nouveaux qui ont été fécondés entre l'instant initial et  $t$ . Dès que le temps est plus grand que  $L$ , alors la population est maintenue non nulle grâce aux nouvelles naissances. Le nombre d'individus augmente dès que le taux de fécondité est plus grand que le taux de mortalité et diminue dans le cas contraire. Webb (1985) donne une brève discussion sur la théorie du comportement asymptotique pour les modèles en âge linéaires comme celui de Von Förster-McKendrick. Il définit une solution d'équilibre de ce modèle comme une solution indépendante du temps  $n(t, a) = \phi(a)$  ou comme le produit de deux fonctions dépendants séparément des variables de  $n$  :  $n(t, a) = e^{\lambda t}\phi(a)$  où  $\lambda$  est une constante positive appelée le taux de croissance de la population.

### Le modèle de Leslie

La solution discrète de l'équation de Von Förster-McKendrick est

$$\begin{cases} n_{i+1}(t + \Delta t) = n_i(t)(1 - \mu(t, a_i)\Delta a) = n_i(t)s_i(t), & i = 1, \dots, m, \\ n_0(t + \Delta t) = \sum_{i=0}^m \beta(t, a_i)n_i(t)\Delta a, \end{cases}$$

où  $\frac{\Delta t}{\Delta a} = 1$  et  $\Delta t$  est le pas de discrétisation en temps. La fonction  $n_i(t)$  est l'approximation de  $n(t, a_i)$  où  $a_{i+1} = a_i + \Delta a$  pour  $i = 0, \dots, m$ , avec  $a_0 = 0$ . La constante  $m$  est le nombre de classes

d'âge obtenues en subdivisant le domaine en âge  $[0, L]$ . De l'équation du dessus, on déduit le modèle de Leslie :

$$n(t + \Delta t) = F(t)n(t) \quad \text{où} \quad n(t) = [n_0(t), \dots, n_m(t)]^T$$

et  $F$  est la matrice donnée par

$$F(t) = \begin{bmatrix} \beta_0(t) & \beta_1(t) & \dots & \beta_m(t) \\ s_0(t) & 0 & & 0 \\ 0 & s_1(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & s_{m-1}(t) & 0 \end{bmatrix}$$

Ici, les nouveaux nés sont générés par les individus de toutes les classes d'âge (si  $\beta_i \neq 0$ , pour  $i = 1, m$ ). Chaque classe d'âge, ou cohorte, est décrite par une équation aux différences finies. Ainsi, le modèle de Leslie donne l'évolution au cours du temps de chaque cohorte c'est-à-dire la taille de la population ainsi que la répartition en âge. En général, ces classes d'âge correspondent aux différentes étapes de la vie d'un individu (jeune, adulte) mais peuvent aussi décrire la croissance d'un individu pour un stade de développement. Par exemple, Söndgerath et al. (1996) utilisent le modèle de Leslie pour décrire séparément les stades oeuf, larve, chrysalide et adulte du cycle biologique de la mouche du chou (*Delia radicum*). A partir de données expérimentales sur le taux de mortalité et le taux de fécondité, les éléments de la matrice peuvent être estimés (Banks et al. 2007).

### Le modèle "Sojourn time"

Il décrit le processus de croissance par des flux d'entités qui évoluent à des taux différents. Ce modèle est utilisé par exemple pour modéliser les cycles cellulaires.

On subdivise l'intervalle des âges  $[0, L]$  en un nombre fini d'intervalles. L'équation de Von Förster peut être approchée sur ce maillage par un système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n_i(t) = R_{i-1} - R_i - \mu_i(t)n_i(t), & i = 1, \dots, k \\ R_0(t) = \sum b_i(t)n_i(t)da \end{cases}$$

où  $R_i$  représente le taux de transfert de la classe  $i$ ,  $R_0$  le taux de reproduction et  $\mu_i(t)n_i(t)$  est le taux de mortalité au stade  $i$ . La constante  $R_i$  peut être approchée par  $\frac{n_i}{T_i}$ , où  $T_i$  est le temps de maturation de chaque individus de la population du stade  $i$ . Le système du dessus s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n_i(t) = \frac{n_{i-1}}{T_{i-1}} - \frac{n_i}{T_i} - \mu_i(t)n_i(t), & i = 1, \dots, k, \\ \frac{n_0}{T_0} = \sum b_i(t)n_i(t)da \end{cases} \quad (2.1)$$

L'avantage avec cette formulation est qu'on peut prendre des temps de maturation  $T_i$  variables en fonction de la classe d'âge  $i$ . Cependant, ces temps sont des constantes et par conséquent le vieillissement de la cohorte est le même pour tous les individus. Si  $T_{i-1} = T_i$ , pour  $i = 1, k$ , le modèle s'apparente au modèle de Leslie présenté au-dessus.

### 2.2.2 Les modèles déterministes en âge physiologique.

Soit  $\Psi(t)$  la variable associée aux facteurs climatiques et environnementales. Le processus de croissance est alors calculé via l'équation différentielle

$$a'(t) = v(\Psi(t), a),$$

où  $v$  est le taux de croissance de la population. Cette fonction correspond à la vitesse de développement d'une population d'âge  $a$  sous des conditions spécifiques à l'instant  $t$ . On peut l'obtenir à partir de données expérimentales mesurant la durée de développement de l'insecte  $D(\Psi(t), a)$  grâce à la relation

$$v(\Psi(t), a) = \frac{1}{D(\Psi(t), a)}.$$

Cette quantité reste inférieure à 1 pour tous les temps  $t$  et les âges  $a$ . La dynamique de la population au cours du temps est alors décrite par

$$\frac{\partial n}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial}{\partial a}[v(\Psi(t), a)n(t, a)] = -\mu(t, a)n(t, a), \quad a \in [0, L],$$

où la donnée initiale est

$$n(0, a) = n_0(a),$$

et la condition au bord

$$v(\Psi(t), 0)n(t, 0) = \int_0^\infty \beta(t, a)n(t, a)da.$$

Les fonctions de mortalité et de fécondité peuvent dépendre de la variable  $\Psi(t)$ . Si le taux de croissance est égal à 1 alors ce modèle est celui de Von Förster-McKendrick et l'âge est chronologique. Sinon, le modèle décrit un vieillissement des individus à des vitesses différentes mais une évolution d'un stade de développement à l'autre au même âge.

On discrétise l'intervalle en âge en  $k$  classes d'âge tel que

$$v(\Psi(t), a_i) \sim v_i(\Psi(t)), \quad i = 1, \dots, k,$$

et  $del(t)$  le temps de maturation moyen, on suppose que

$$v_i(\Psi(t)) = v(t) = \frac{k\Delta a}{del(\Psi(t))}, \quad i = 1, \dots, k$$

Pour des conditions climatiques identiques, le temps de maturation est le même quelque soit la classe d'âge. En injectant dans l'équation semi discrétisée en âge du dessus, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}n_i(t) = \frac{k}{del(t)}[n_{i-1}(t) - n_i(t)] - \mu_i(t)n_i(t),$$

qui, en terme de flux  $r_i(t) = n_i(t)\frac{k}{del(t)}$  donne

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{del(t)}{k} r_i(t) \right] = r_{i-1}(t) - r_i(t) - \frac{del(t)}{k} \mu_i(t) n_i(t),$$

où  $r_1(t) = x_0(t)$  est le flux entrant alors que  $r_k(t) = f(t)$  est celui sortant. Ce modèle a été proposé par Manetsch en 1976 et repris par Vansickle en 1977. Il est appelé "box car" ou "time distributed delay"(TDD). Les TDD sont en général des modèles à temps variant, cependant, un nombre important d'applications utilise un taux de développement moyen invariant au cours du temps (Wang et Shipp, 2001, Vansickle 1977; Severini et al., 2003). Dans le cas où la durée de développement varie dans le temps ainsi que la mortalité, le modèle ne donne pas une distribution explicite du temps d'émergence. Si  $del(t) = const$  (donc  $v(t) = const$ ) et  $\mu_i(t) = \mu$  alors la distribution du temps d'émergence  $f(t)$  d'une cohorte est donnée par une fonction Gamma

$$f(t) = \left( \frac{k}{del} \right)^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-(\frac{k}{del}t)} e^{-\mu t},$$

si la donnée initiale est un Diract  $\delta(t)$ . Dans ce cas, on parle de modèle "time-unvarying distributed delay". Pour une mortalité nulle, Severini et al. (2003) estiment les paramètres  $k$  et  $del$  de cette fonction à partir de données expérimentales portant sur la durée de développement à température constante.

Si à présent on discrétise le domaine en temps, alors on obtient un système d'équations discrètes. Ce nouveau modèle est un modèle matriciel qui s'apparente à celui de Leslie.

### 2.2.3 D'autres modèles

Parmi les modèles déterministes avec variables physiologiques, il y a celui de Kolmogorov

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}n(t, a) + \frac{\partial}{\partial a}v(t, a)n(t, a) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}k(t, a)n(t, a) = -\mu(t, a)n(t, a), \\ [v(t, a)n(t, a) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}k(t, a)n(t, a)]_{a=0} = \int_0^\infty \lambda(t, a)n(t, a)da, \\ n(0, a) = n_0(a), \end{cases}$$

où  $v(t, a)$  et  $k(t, a)$  sont la moyenne et la variance du taux de développement. Cette équation dite de réaction diffusion a été discutée et utilisée par plusieurs chercheurs comme Barr et al.(1973), Auslander et al. (1974), Welch et al. (1978), Plant et Wilson (1986) et Munholland et al. (1989). Welch et al. introduisent l'équation de manestch (1976) et l'équation de Kolmogorov dans son modèle de gestion des ravageurs et trouve des résultats proches. Plant et Wilson (1986) critiquent le modèle Kolmogorov pour sa modélisation du vieillissement de la population car l'âge des individus peut augmenter et diminuer.

## 2.3 Les modèles Eudémis.

Trois modèles ont été proposés pour le suivi des dynamiques des populations d'Eudémis : le modèle EVA, le modèle ACTA, et le modèle Brière. Le premier est utilisé à Bordeaux par les Services Régionaux de Protection des Végétaux (SRPV) alors que le deuxième est utilisé par l'Institut de la vigne et du vin. Ce dernier est aussi utilisé dans l'Est de la France, l'Allemagne et la Suisse. Le modèle Brière n'est pas utilisé pour prédire les dynamiques des populations car il n'a pas été validé en vignoble.

EVA et ACTA tentent d'estimer les courbes de ponte et d'éclosion des oeufs sur toute la saison afin d'optimiser les traitements phytosanitaires. Ces prévisions sont faites en fonction des données thermiques. Le cahier des charges de ces modèles est de fournir une description biologique réaliste du cycle annuel de développement (modèle phénologique), et qu'il puisse prendre en compte les particularités climatiques micro régionales (modèle thermique).

### 2.3.1 Le modèle EVA.

Il a été mis au point par Touzeau en 1979 puis adapté à d'autres régions viticoles françaises (Chavent, 1983). Ce modèle est construit expérimentalement, il n'y a donc pas d'équations mathématiques explicites le constituant.

Le modèle est initialisé dès l'apparition de papillons dans le vignoble. Des observations sont alors faites aux pièges alimentaires et sexuels et sur des chrysalides d'hiver récoltées en vignoble pour fixer la date d'émergence des premiers papillons. A partir de là, une énergie thermique ( $d$ ) en base 10 est calculée tous les jours. Elle est obtenue en soustrayant au seuil de développement

zéro fixé à 10°C la moyenne des températures maximales ( $T_{max}$ ) et minimales ( $T_{min}$ ), soit plus explicitement par

$$d = \frac{T_{min} + T_{max}}{2} - 10. \quad (2.2)$$

Le cumul de cette quantité thermique ( $d$ ) donne la somme de degrés jours ( $S$ ) en base 10. La température seuil de développement zéro est la limite dans les températures froides entre un développement inhibé et normal (Brière, 1998). Le choix de cette valeur est fait expérimentalement. L'enregistrement des données thermiques est réalisé à partir d'un réseau de stations météorologiques réparti également sur l'ensemble du domaine viticole. Cette somme de degrés jours ( $S$ ) est alors comparée à un tableau de valeurs (tableau 2.1) donnant le pourcentage de papillons émergents.

S	29	37	44	48	52	57	64	75	87	118
%	10	20	30	40	50	60	70	80	90	99

TAB. 2.1: Pourcentage de papillons émergents en fonction de la somme de degrés jours calculée selon la formule (2.2). Résultat obtenu par Touzeau à partir d'insectes sauvages.

Par exemple, pour une somme égale à 48°C, le nombre total de papillons ayant émergés est de 40%. Les pourcentages d'émergence sont obtenus à partir de populations naturelles qui ont en général été prélevées sur le même domaine que sur celui où est ajusté le modèle. D'autres informations sont aussi recueillies à partir de ces populations comme le taux de ponte, les périodes de préoviposition, d'oviposition, le sexe ratio et les durées de développement des oeufs et des larves. Ces dernières sont données en somme de degrés jours. Un taux de mouillage des feuilles est modélisé comme facteur dissuasif de ponte.

En sortie du modèle, un pourcentage de papillons émergents cumulé est donné pour connaître l'importance de la population de papillons à un jour donné. Les courbes de la dynamique de ponte et d'éclosion des chenilles sont alors déduites et sont aussi données en pourcentage cumulé. Le tableau (2.2) est un exemple de prévisions faites le 12 mai 1985.

Date	S	papillon du jour	Cumul	ponte du jour	cumul	éclosion du jour	cumul
12/05/83	90°C	2%	92%	3%	47%	0,4%	0,4%

TAB. 2.2: Pourcentage de papillons émergents, d'oeufs pondus et de chenilles éclosants le 12 mai 1985 calculés par le modèle EVA et pourcentages cumulés de ces populations depuis le début de l'année.

Les prévisions de ce modèle sont faites sur une saison viticole et commencent avec la dynamique de ponte de la génération du printemps. Ce modèle ne prend pas en compte la diapause, et par conséquent n'estime pas la dynamique de vol de la G1.

### 2.3.2 Le modèle d'ACTA.

Il a été développé à partir des travaux de Baumgartner et Baronio qui datent de 1988. Aujourd'hui ce modèle est commercialisé par ACTA-ITV.

Le modèle est initialisé au premier janvier avec 100 chrysalides. Suivant la région où l'on effectue la simulation, un coefficient de diapause est calculé expérimentalement afin de caler les simulations d'émergence des papillons du printemps sur les valeurs réelles. Tous les jours et toutes les 3

heures sont enregistrées la température minimale, maximale et moyenne. Un réseau de stations météorologiques est placé à plusieurs endroits du vignoble pour faire des mesures thermiques fiables. La croissance de l'insecte est calculée avec l'équation de Logan et al. (1976) suivante

$$v(T) = \psi \left[ e^{\rho T} - e^{\rho T_m - \frac{T_m - T}{\Delta T}} \right]$$

où  $\psi$ ,  $\rho$  et  $\Delta T = T_m - T_0$  sont des constantes,  $T_0$  est la température pour laquelle le développement est optimal et  $T_m$  est la température létale (température maximale de développement zéro). La constante  $\rho$  est la pente de la droite dans la tranche linéaire de la courbe alors que  $\psi$  et  $\rho$  sont des constantes empiriques, elles sont obtenues en interpolant la courbe de Logan avec les mesures sur le temps de développement faites à température constante. Cette fonction calcule la vitesse de développement pour les stades oeuf et larve en fonction de la température moyenne de la journée. Ce taux est ensuite injecté dans les équations décrivant la dynamique des populations. Elles correspondent aux modèles TDD à temps invariant donné dans le paragraphe (2.2.2). Les sorties du modèle sont en pourcentage et concernent les oeufs, les jeunes larves, les larves plus âgées et les chrysalides. Ces pourcentages sont cumulés au jour le jour.

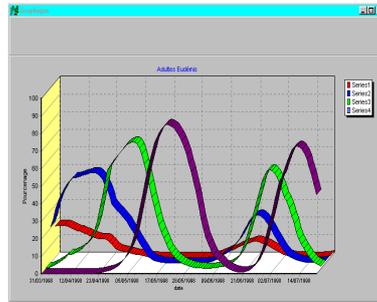


FIG. 2.1: Exemple de simulations du modèle ACTA. Les courbes rouge, bleue, verte et violette représentent respectivement les oeufs jeunes, âgés, les larves jeunes et âgées.

La valeur des fonctions de mortalité n'est pas précisée. Ce modèle stoppe les simulations après la troisième génération, il ne modélise donc pas la diapause.

### 2.3.3 Le modèle Brière

Ce modèle a été développé au début des années 1990 au cours de la thèse de J.F. Brière. Son travail consistait à modéliser les déplacements des papillons en fonction des diffuseurs de phéromones sexuelles. Il propose un système d'équations aux dérivées partielles. Sept équations modélisent la dynamique temporelle des populations oeuf, des cinq stades larvaires et du stade chrysalide dont la formulation générale est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} [V(t, a) \rho(t, a)] = -m(a) \rho(t, a) - D(a) V(t, a) \rho(t, a),$$

où  $V(t, a)$  est le taux de croissance à l'âge  $a$  et au temps  $t$ ,  $D(a)$  est le taux de passage entre deux stades de développement consécutifs à l'âge  $a$  et  $m(a)$  est le taux de mortalité à l'âge  $a$ . Le taux de croissance est donnée pour chaque stade de développement par la relation suivante

$$V(T) = bT(T - T_0) \sqrt{(T_m - T)},$$

où  $T_0$  est la température seuil de développement zéro et  $T_m$  est la température létale. Cette fonction est exprimée en fonction de la température et ne dépend pas de la variable âge. Contrairement à l'équation de Logan et al. (1976), la fonction vitesse de Brière n'est composée que

de trois inconnues. L'auteur mesure les durées de développement de l'insecte des stades oeuf, larvaire (L1 à L5) et chrysalide en fonction de la température. Il utilise des enceintes climatiques afin de réguler des conditions thermiques constantes. Il teste une fourchette de températures allant de 8°C à 32°C par pas de 2°C. La fonction de développement est ajustée à ces données expérimentales. C'est l'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses qui donne la valeur de  $T_0$  et  $T_m$ .

Les taux de passage entre chaque stade du cycle de l'insecte sont modélisés par une loi normale. Brière admet que les différences de croissance dans une cohorte sont symétriquement distribuées. Les individus d'un même stade grandissent avec la même vitesse de développement mais passent au stade supérieur à des âges différents. La valeur des fonctions de mortalité est obtenue expérimentalement et est fonction de la température.

La dynamique temporelle des adultes est modélisée dans une équation aux dérivées partielles qui décrit aussi leurs mouvements spatiaux en fonction des odeurs et de la direction des rangs de vigne. Enfin, une dernière équation modélise la propagation des odeurs en fonction du vent, de l'absorption et de la source des odeurs.

Le modèle présenté dans ce paragraphe tient compte du stade chrysalide. Le modèle Brière peut être utilisé pour simuler la diapause.

## 2.4 Les objectifs de notre modèle.

Contrairement aux modèles ACTA et EVA, on souhaite développer un modèle pour l'étude et la compréhension de la dynamique des populations d'Eudémis. On suppose qu'un modèle capable de reproduire la dynamique des populations mesurée expérimentalement est un modèle qui aide à améliorer les connaissances sur cette population. La prédiction en temps ou en espace est alors possible car le modèle "comprend" le comportement de la dynamique des populations. Le modèle développé dans cette thèse est conçu pour décrire l'évolution quantitative en temps des populations Eudémis en fonction de la ressource alimentaire, de la température, de l'humidité, de la prédation et des différences inter-individuelles. Les données expérimentales disponibles à l'UMR Santé Végétale de l'INRA Villenave d'Ornon mais aussi celle des articles scientifiques qui ont servi à la rédaction du premier chapitre, vont être exploitées pour la construction de ce modèle.



## Première partie

Modélisation de la dynamique des populations de l'Eudémis de la vigne et étude mathématique du modèle.



## Chapitre 3

# Modélisation de la dynamique des populations de l'Eudémis de la vigne.

L'objectif de ce chapitre est de construire le modèle mathématique à partir des hypothèses biologiques formulées dans la première partie du mémoire. Son élaboration est faite en plusieurs étapes. D'abord, on modélise la dynamique des populations d'Eudémis dans un milieu constant, c'est à dire en conditions de laboratoire. Puis on prend en compte les facteurs climatiques et environnementaux expliquant les variations numériques de la population au cours de temps.

### 3.1 Modélisation de la croissance d'une population quelconque.

Ce paragraphe est destiné à fournir le principe de base sur la modélisation de la croissance d'une population dans un environnement constant. On néglige dans ce modèle la mortalité des individus.

Soient les variables descriptives  $a$  et  $t$ , définies sur la même échelle qui est le jour. La première correspond à l'âge chronologique et la deuxième est le temps. On note  $u(t, a)$  la densité d'individus d'âge  $a$  à l'instant  $t$ , et  $\Delta t$  et  $\Delta a$  les pas de temps et d'âge. La quantité  $u(t, a)\Delta a$  correspond au nombre d'individus présents sur l'intervalle d'âge  $[a, a + \Delta a]$  à l'instant  $t$ . On souhaite établir une relation mathématique permettant de calculer la taille de cette population à l'instant  $t + \Delta t$ . Le schéma (3.1) représente le bilan quantitatif de cette population à l'instant  $t + \Delta t$ .

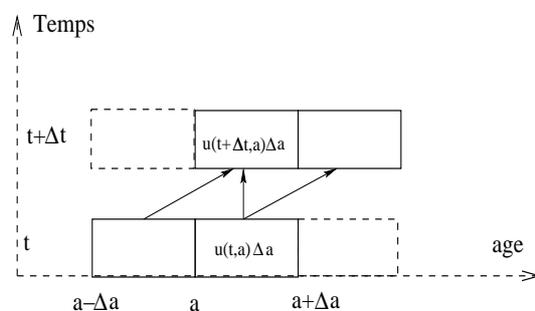


FIG. 3.1: Schématisation du vieillissement d'une population d'âge compris dans l'intervalle  $[a, a + \Delta a]$  entre deux instants consécutifs.

Si le pas de temps  $\Delta t$  est égal au pas de vieillissement  $\Delta a$  alors la population dont l'âge est dans l'intervalle  $[a, a + \Delta a]$  à cet instant correspond à la population dont l'âge est dans l'intervalle

$[a - \Delta a, a[$  au temps précédent, soit

$$u(t + \Delta t, a)\Delta a = u(t, a - \Delta a)\Delta a, \quad (3.1)$$

Si le pas d'âge est proportionnel au pas de temps, par exemple  $\Delta a = v\Delta t$ , alors l'équation mathématique s'écrit

$$u(t + \Delta t, a)\Delta a = u(t, a)\Delta a + u(t, a - \Delta a)v\Delta t - u(t, a)v\Delta t, \quad (3.2)$$

Le domaine de la variable âge peut être infini ou fini. Dans le deuxième cas, on parle d'âge maximal de vie. Cet âge est atteint à  $t$  égal à  $\frac{L}{v}$  si  $L$  est l'âge maximal et  $v$  est un réel.

Le décompte de la population dont l'âge est compris dans l'intervalle  $[0, \Delta a]$  et à l'instant  $t + \Delta t$  se calcule avec l'équation

$$u(t + \Delta t, a)\Delta a = u(t, a)\Delta a + u(t, 0)v\Delta t - u(t, a)v\Delta t.$$

La densité d'individus à l'âge 0 représente le flux des nouveaux arrivants. Cette quantité est la condition de renouvellement de la population.

A l'aide de propriétés mathématiques il est facile de convertir le modèle en temps continu et en âge continu. On retrouve alors l'équation aux dérivées partielles du modèle Von Forster-McKendrick avec une mortalité nulle présenté au chapitre précédent.

## 3.2 Modélisation de la croissance d'une population Eudémis : deux modèles différents.

L'objectif de ce paragraphe est de modéliser les différences de croissance qui existent au sein d'une cohorte Eudémis soumise à des conditions climatiques constantes. On propose deux méthodes de modélisation. La première s'appuie sur les observations biologiques alors que la seconde est construite à partir des données expérimentales. Le modèle final est exprimé en temps continu et est basé sur l'équation (3.2) présentée dans le paragraphe ci-dessus. On néglige dans ces modèles la mortalité des individus.

On indice les stades de développement par  $e$  pour le stade oeuf,  $l$  pour le stade larve,  $f$  pour les femelles et  $m$  pour les mâles. Le stade chrysalide est modélisé dans le stade larve car les mesures expérimentales sur le développement de l'insecte sont faites à partir de larves L1 nées le même jour et s'arrêtent au moment de l'émergence du papillon. La densité d'individus de ces populations est notée  $u^k$  où  $k$  est égal à  $e, l, f, m$ .

### 3.2.1 Modèle dérivant du modèle Von Forster-McKendrick.

On suppose que, sous des conditions environnementales constantes, les individus vieillissent tous de la même manière mais que l'âge de maturité pour un stade varie selon les individus. Dans ce cas, on ajoute un terme dans l'équation (12.10) que l'on note  $\beta^k(a)$ , où  $k$  est égal à  $e, l$ . Il représente la proportion d'individus d'âge  $a$  et du stade  $k$  qui passe au stade supérieur au cours

de l'intervalle de temps  $\Delta t$ . Les équations associées à chaque stade de développement sont

$$\begin{cases} u^e(t + \Delta t, a)\Delta a = u^e(t, a)\Delta a + u^e(t, a - \Delta a)\Delta t - u^e(t, a)\Delta t \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad -\beta^e(a)u^e(t, a)\Delta a\Delta t, \\ u^l(t + \Delta t, a)\Delta a = u^l(t, a)\Delta a + u^l(t, a - \Delta a)\Delta t - u^l(t, a)\Delta t \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad -\beta^l(a)u^l(t, a)\Delta a\Delta t, \\ u^f(t + \Delta t, a)\Delta a = u^f(t, a)\Delta a + u^f(t, a - \Delta a)\Delta t - u^f(t, a)\Delta t, \\ u^m(t + \Delta t, a)\Delta a = u^m(t, a)\Delta a + u^m(t, a - \Delta a)\Delta t - u^m(t, a)\Delta t. \end{cases}$$

La fonction  $\beta^e(a)$  s'appelle la fonction de développement du stade oeuf ou la fonction de passage du stade oeuf au stade larve par rapport à l'âge  $a$ . Le taux  $\beta^l$  est la fonction de passage entre le stade larve et le stade papillon. Ce terme supplémentaire n'apparaît pas dans les équations des stades adultes car les individus meurent au cours de ce stade.

La condition de renouvellement de ces populations s'exprime en fonction des  $\beta^k$

$$u^p(t, 0) = \Delta a \sum_a \beta^k(a)u^k(t, a),$$

où le couple d'indices prend respectivement les valeurs

$$(p, k) = (e, f), \quad (l, e), \quad (f, l) \quad \text{et} \quad (m, l).$$

Les nouveaux individus sont apportés par les femelles  $u^f(t)$  selon une proportion  $\beta^f$ . Cette quantité représente le taux de fécondité. La valeur des fonctions de développement  $\beta^k$ , où  $k$  est égal à  $e, l, f$  est propre à chacun des stades. On fait tendre les pas d'âge et de temps vers la valeur zéro pour obtenir un modèle continu

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u^e(t, a) + \frac{\partial}{\partial a}u^e(t, a) = -\beta^e(a)u^e(t, a), \\ \frac{\partial}{\partial t}u^l(t, a) + \frac{\partial}{\partial a}u^l(t, a) = -\beta^l(a)u^l(t, a), \\ \frac{\partial}{\partial t}u^f(t, a) + \frac{\partial}{\partial a}u^f(t, a) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}u^m(t, a) + \frac{\partial}{\partial a}u^m(t, a) = 0, \end{cases}$$

pour  $t$  strictement positif et  $a$  dans le domaine  $[0, L^k]$ , où  $L^k$  est l'âge maximal du stade de développement  $k$ . Les équations de ce système ressemblent au modèle de Von Förster-McKendrick présenté dans le chapitre précédent. Dans les deux premières équations, la fonction de développement remplace la fonction de mortalité alors que dans les deux dernières équations c'est la fonction nulle. Les conditions aux limites sont

$$\begin{cases} u^e(t, 0) = \int_0^{L^f} \beta^f(s)u^f(t, s)ds, \\ u^l(t, 0) = \int_0^{L^e} \beta^e(s)u^e(t, s)ds, \\ u^f(t, 0) = \int_0^{L^l} \tau\beta^l(s)u^l(t, s)ds, \\ u^m(t, 0) = \int_0^{L^l} (1 - \tau)\beta^l(s)u^l(t, s)ds, \end{cases}$$

où  $\tau$  est le sexe ratio. Dans ce modèle, seules les fonctions de passage et le taux de natalité sont à déterminer.

### 3.2.2 Modèle Méta-population.

On suppose que les individus n'ont pas la même vitesse de développement mais que l'âge de maturité d'un stade de croissance est fixé. Dans ce cas, on ajoute une structuration de la

population par rapport à la vitesse de croissance. Soient  $k_e, k_l, k_f$  et  $k_m$  les nombres de classes de développement au stade oeuf, larve, femelle et mâle respectivement. A partir des données expérimentales, on connaît le temps passé par les individus dans une classe de développement pour tous les stades du cycle biologique. On désigne alors par  $T_i^e$ , pour  $i$  allant de 1 à  $k_e$ ,  $T_j^l$ , pour  $j$  allant de 1 à  $k_l$ ,  $T_k^f$ , pour  $k$  allant de 1 à  $k_f$ , et  $T_p^m$ , pour  $p$  allant de 1 à  $k_m$  les durées moyennes de vie de la classe de développement  $i$  du stade oeuf, de la classe  $j$  du stade larve, de la classe  $k$  du stade femelle, et de la classe  $p$  du stade mâle, respectivement. La croissance d'une population appartenant à une classe de développement est modélisée par l'équation (3.2) du paragraphe précédent. Elle est appliquée à tous les stades de croissance. Le modèle qui décrit la croissance de la population Eudémis est

$$\begin{cases} u_i^e(t + \Delta t, a) = u_i^e(t, a) - \frac{\Delta t}{\Delta a} u_i^e(t, a) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_i^e(t, a - \Delta a), & i = 1, k_e, \\ u_j^l(t + \Delta t, a) = u_j^l(t, a) - \frac{\Delta t}{\Delta a} u_j^l(t, a) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_j^l(t, a - \Delta a), & j = 1, k_l, \\ u_k^f(t + \Delta t, a) = u_k^f(t, a) - \frac{\Delta t}{\Delta a} u_k^f(t, a) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_k^f(t, a - \Delta a), & k = 1, k_f, \\ u_p^m(t + \Delta t, a) = u_p^m(t, a) - \frac{\Delta t}{\Delta a} u_p^m(t, a) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_p^m(t, a - \Delta a), & p = 1, k_m. \end{cases}$$

où les conditions de renouvellement sont données par

$$\begin{cases} u_i^e(t, 0) = \alpha_i^e \sum_{k=1}^{k_f} u^f(t, T_k^f), & i = 1, k_e, \\ u_j^l(t, 0) = \alpha_j^l \sum_{k=1}^{k_e} u^e(t, T_k^e), & j = 1, k_l, \\ u_k^f(t, 0) = \alpha_k^f \sum_{k=1}^{k_l} u^l(t, T_k^l), & k = 1, k_f, \\ u_p^m(t, 0) = \alpha_p^m \sum_{k=1}^{k_l} u^l(t, T_k^l), & p = 1, k_m, \end{cases}$$

Pour chaque stade de croissance  $k$ , les nouveaux individus d'une classe de développement  $i$  sont apportés par tous les individus du stade de croissance précédent selon une proportion  $\alpha_i^k$ .

On fait évoluer ce modèle vers une description continue des variables temps, âge et "vitesse de développement". On dénote  $g$  la variable dissociant les individus par leur vitesse de croissance. Elle est définie sur l'intervalle  $[0, k_n]$  où  $k_n$  est le nombre de classe de développement du stade de croissance  $n$ . On note  $T^n(g)$  la fonction modélisant la durée de vie du stade de croissance  $n$  en fonction du taux de développement des individus. Les constantes  $\alpha_i^n$  pour  $i$  allant de 1 à  $k_n$  deviennent en continu les fonctions  $\alpha^n(g)$ . Le modèle Eudémis s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u^e(t, a, g) + \frac{\partial}{\partial a} u^e(t, a, g) = 0, & a \in [0, T^e(g)], \quad g \in [0, k_e], \\ \frac{\partial}{\partial t} u^l(t, a, g) + \frac{\partial}{\partial a} u^l(t, a, g) = 0, & a \in [0, T^l(g)], \quad g \in [0, k_l], \\ \frac{\partial}{\partial t} u^f(t, a, g) + \frac{\partial}{\partial a} u^f(t, a, g) = 0, & a \in [0, T^f(g)], \quad g \in [0, k_f], \\ \frac{\partial}{\partial t} u^m(t, a, g) + \frac{\partial}{\partial a} u^m(t, a, g) = 0, & a \in [0, T^m(g)], \quad g \in [0, k_m], \\ u^e(t, 0, g) = \alpha^e(g) \int_0^{k_f} u^f(t, T^f(s), s) ds, \\ u^l(t, 0, g) = \alpha^l(g) \int_0^{k_e} u^e(t, T^e(s), s) ds, \\ u^f(t, 0, g) = \alpha^f(g) \int_0^{k_l} u^l(t, T^l(s), s) ds, \\ u^m(t, 0, g) = (1 - \alpha^f(g)) \int_0^{k_l} u^l(t, T^l(s), s) ds. \end{cases}$$

Les inconnues de ce modèle sont les fonctions  $T^n(g)$ ,  $n = e, l, f, m$ , les fonctions taux  $\alpha^n(g)$  et les constantes  $k_e, k_l, k_f, k_m$ .

### 3.2.3 Choix du modèle.

L'initialisation du modèle méta-population est possible à condition de connaître la distribution en âge de la population pour chaque classe de développement. Les données expérimentales,

dont nous disposons, ne précisent pas les propriétés endogènes des cohortes Eudémis utilisées au début des expériences. Par conséquent, on ne sait pas définir les fonctions  $u^k$ , pour  $k$  égal à  $e, l, f, m$  à l'instant initial à moins de les estimer.

Comparé au premier modèle, le nombre de paramètres constituant le modèle méta-population est plus important. Ce modèle est exprimé avec 7 fonctions ( $\alpha^n$ , pour  $n$  égal à  $e, l, f$  et  $T^n$  pour  $n$  égal à  $e, l, f, m$ ) et 4 constantes ( $k_n$  pour  $n$  égal à  $e, l, f, m$ ) alors que le premier modèle ne dépend que de 3 fonctions ( $\beta^n$ , pour  $n$  égal à  $e, l, f$ ) et une constante ( $\tau$ ). De plus, les fonctions  $T^n$ , pour  $n$  égal à  $e, l, f, m$  et les constantes  $k_n$ , pour  $n$  égal à  $e, l, f, m$  du deuxième modèle représentent des bornes du domaine de définition de la variable âge et celles du domaine de définition de la variable "vitesse de développement". Sans connaissance explicite de ces paramètres, il est difficile de les calculer à partir d'une méthode d'estimation. Rundell (1993) étudie le problème d'estimation du taux de mortalité de l'équation de Von Förster-McKendrick à partir de données expérimentales. Pilant et al. (1991) ou encore Gyllenberg et al. (2002) étudient d'autres problèmes inverses sur cette équation. Les équations du premier modèle s'apparente à l'équation de Von Förster-McKendrick. En se basant sur ces travaux, la détermination des paramètres de ce modèle est alors envisageable à partir de données expérimentales.

Enfin, le modèle méta-population est composé d'un nombre important d'équations, et donc de paramètres, dès qu'on affine le nombre de classes de développement. Ce nombre ne varie pas dans le premier modèle car les différences de croissance sont modélisées dans les taux de passage d'un stade de développement à l'autre ( $\beta^e$  et  $\beta^l$ ).

Pour toutes ces raisons, on choisit de développer puis d'étudier mathématiquement le premier modèle proposé ci-dessus. Ce dernier semble plus adapté pour modéliser les données expérimentales et pour étudier la dynamique des populations d'Eudémis.

### 3.3 Le modèle *Lobesia botrana* annuel.

On généralise le modèle dérivant de l'équation de Von Förster-McKendrick pour la simulation et la compréhension des dynamiques des populations d'Eudémis de la vigne dans son environnement naturel. On le développe pour l'étude de ces populations sur une année entière. C'est à dire, on modélise la croissance de la population Eudémis sur 3 voir 4 générations jusqu'à la diapause. Le stade chrysalide dure, en moyenne une semaine pendant les générations printanières et estivales. On fusionne alors ce stade avec le stade larve. Le calcul de la population totale du stade  $k$  est donné par

$$P^k(t) = \int_0^{L^k} u^k(t, a) da, \quad \forall t \geq 0, \quad k = e, l, m, f.$$

Le modèle Eudémis ou *Lobesia botrana* s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u^e(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} [v^e(E(t), a) u^e(t, a)] = -m^e(E(t), a) u^e(t, a) \\ \quad -\beta^e(E(t), a) u^e(t, a), \\ \frac{\partial}{\partial t} u^l(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} [v^l(E(t), a) u^l(t, a)] = -m^l(P^l(t), E(t), a) u^l(t, a) \\ \quad -\beta^l(E(t), a) u^l(t, a), \\ \frac{\partial}{\partial t} u^f(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} [v^f(E(t), a) u^f(t, a)] = -m^f(E(t), a) u^f(t, a), \\ \frac{\partial}{\partial t} u^m(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} [v^m(E(t), a) u^m(t, a)] = -m^m(E(t), a) u^m(t, a), \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $t$  est strictement positif et  $a$  est dans l'intervalle  $[0, L^k]$  pour  $k$  égal à  $e, l, f, m$ . Le vecteur  $E$  correspond aux variables climatiques et environnementales, et s'écrit  $(T, H, R)$  où  $T$  désigne la température,  $H$  l'humidité et  $R$  la ressource alimentaire. Ce vecteur est dépendant du temps.



âge et le taux de passage entre le stade chrysalide et papillon en fonction de l'âge. Toutes ces fonctions dépendent des conditions climatiques et environnementales  $E(t)$  qui varient au cours du temps. Les conditions aux limites de ce système sont

$$\begin{cases} v^e(E(t), 0)u^e(t, 0) = \int_0^{L^f} \beta^f(P^f(t), P^m(t), E(t), s)u^f(t, s)ds \\ v^l(E(t), 0)u^l(t, 0) = \int_0^{L^e} \beta^e(E(t), s)u^e(t, s)ds \\ v^c(E(t), 0)u^c(t, 0) = \int_0^{L^l} \beta^l(E(t), s)u^l(t, s)ds \\ v^f(E(t), 0)u^f(t, 0) = \int_0^{L^p} \tau\beta^c(E(t), s)u^c(t, s)ds \\ v^m(E(t), 0)u^m(t, 0) = \int_0^{L^p} (1 - \tau)\beta^c(E(t), s)u^c(t, s)ds \end{cases}$$

pour  $t$  strictement positif. La fonction  $\beta^l$  modélise dans ce modèle la transition des individus entre les stades larve et chrysalide. L'estimation expérimentale de cette fonction n'est pas possible car on ne mesure pas la dynamique des individus entrant en diapause ou bien celle initialisant le stade nymphe.



## Chapitre 4

# Analyse mathématique du modèle *Lobesia botrana*.

On étudie dans ce chapitre l'existence et l'unicité de solutions pour les modèles *Lobesia botrana* annuel et pluriannuel. La preuve est présentée sur le modèle annuel, autrement dit sur le système (3.3)-(3.4)-(3.5) du chapitre précédent et est adaptable pour le modèle pluriannuel.

Gurtin et MacCamy (1974) prouvent l'existence d'une solution unique à l'équation de Von Förster-McKendrick dont les fonctions démographiques sont dépendantes de la population totale  $P(t) = \int_0^\infty u(t, a) da$ . Ils se ramènent à l'étude de deux équations intégrales dont la première équation concerne la population totale alors que la seconde provient de la condition de renouvellement. Par une méthode de point fixe, ils garantissent l'unicité de la solution du problème. Webb (1985) s'intéresse aussi à l'analyse mathématique de ce modèle non linéaire. Il construit sa preuve d'existence et d'unicité sur la théorie des semi-groupes et présente des résultats sur la positivité et la régularité de la solution. Calsina et al. (1995) s'intéressent au modèle de la dynamique des populations structurées en âge physiologique avec un taux de croissance non linéaire et des fonctions démographiques dépendant de la population totale. En adoptant la méthode mathématique de Gurtin et al. (1974), ils montrent que ce modèle est bien posé. A notre connaissance, il n'existe pas de preuve sur l'existence unique de solutions pour un système d'équations hyperboliques semblable à notre modèle. Notre démonstration est basée sur la théorie du point fixe.

On note dans ce paragraphe  $\Omega^k$ , pour tous  $k$  égal à  $e, l, f, m$ , le domaine  $[0, T] \times [0, L^k]$ . A l'aide de la méthode des caractéristiques, les solutions  $u^e$ ,  $u^f$  et  $u^m$  du système (3.3)-(3.4)-(3.5) sont implicitement données par

$$u^k(t, a) = \begin{cases} u_0^k(X^k(0; a, t)) e^{-\int_0^t h^k(s, X^k(s; a, t)) ds}, & a > Z^k(t), \\ \frac{u^k(Z^k(0; a, t), 0)}{v^k(E(Z^k(0; a, t)), 0)} e^{-\int_{Z^k(0; a, t)}^t h^k(s, X^k(s; a, t)) ds}, & a \leq Z^k(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

où la fonction  $h^k$  est défini pour  $k = e, f, l, m$  par

$$\begin{cases} h^e(t, a) = (m^e + \beta^e + \partial_a v^e)(E(t), a), \\ h^l(t, a) = m^l(P^l(t), E(t), a) + (\beta^l + \partial_a v^l)(E(t), a), \\ h^f(t, a) = (m^f + \partial_a v^f)(E(t), a), \\ h^m(t, a) = (m^m + \partial_a v^m)(E(t), a), \end{cases}$$

et  $X^k(t; a_0, t_0)$  est la courbe caractéristique, passant par le point  $(a_0, t_0)$ . Cette dernière est

déterminée par la résolution de l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} (X^k)'(t) = v^k(E(t), X^k(t)), \\ X^k(t_0) = a_0 > 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

La solution de cette équation, pour tous  $k$  égal à  $e, l, f, m$ , dépend de la valeur de la fonction de développement. Elle est strictement croissante car  $v^k$  est strictement positive pour tous  $k$  égal à  $e, l, f, m$ . Par conséquent, sa fonction inverse  $Z^k(a; a_0, t_0)$  existe et est unique pour tous  $k$  égal à  $e, l, f, m$ . Pour l'analyse mathématique du modèle, on donne les hypothèses suivantes sur les fonctions du modèle Eudémis annuel

**H 1** Les vitesses de développement  $v^k$ , pour  $k$  égal à  $e, l, f, m$ , sont non négatives, bornées par rapport à la variable âge

$$0 < \underline{v}^k < v^k(E(t), a) < \bar{v}^k, \quad \forall (t, a) \in \Omega^k,$$

et appartiennent à la classe de fonctions  $C^1([0, L^k])$  : soit  $C_{v^k}$  une constante positive telle que

$$\left\| \frac{\partial v^k(E(t), a)}{\partial a} \right\|_{\infty} \leq C_{v^k}, \quad \forall (t, a) \in \Omega^k.$$

**H 2** Les fonctions taux d'éclosion  $\beta^e(E(t), a)$  et taux d'émergence  $\beta^l(E(t), a)$  sont bornées, non négatives par rapport à la variable âge.

**H 3** La fonction taux de fécondité  $\beta^f(P^f, E(t), a)$  est bornée, non négative par rapport à la variable âge et Lipschitzienne sur  $[0, K]$  de constante  $\beta_K^f$  par rapport à  $P^f$  où  $K$  est strictement plus grand que  $P^f(0)$ .

**H 4** Les fonctions de mortalité  $m^e(E(t), a)$ ,  $m^f(E(t), a)$  et  $m^m(E(t), a)$  sont non négatives, localement bornées et vérifient la condition

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow L^k} \int_0^t m^k(E(t), X^k(s; a, t)) ds &= \infty, \quad a > Z^k(t), \\ \lim_{a \rightarrow L^k} \int_{Z^k(0; a, t)}^t m^k(E(t), X^k(s; a, t)) ds &= \infty, \quad a \leq Z^k(t), \end{aligned}$$

pour  $t$  strictement positif et  $k$  égal à  $e, f, m$ .

**H 5** La fonction de mortalité du stade larve  $m^l(P^l, E(t), a)$  est non négative, localement bornée, Lipschitzienne sur  $[0, N]$  de constante  $m_N^l$  par rapport à  $P^l$  et vérifie la condition

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow L^l} \int_0^t m^l(P^l(t), E(t), X^l(s; a, t)) ds &= \infty, \quad a > Z^l(t), \\ \lim_{a \rightarrow L^l} \int_{Z^l(0; a, t)}^t m^l(E(t), X^l(s; a, t)) ds &= \infty, \quad a \leq Z^l(t), \end{aligned}$$

pour  $t$  strictement positif.

**H 6** Les données initiales  $u_0^k$ , pour  $k$  égal à  $e, l, f, m$  sont non négatives.



avec  $\epsilon$  et  $D$  deux constantes positives telles que

$$D = D_1 \frac{L^l \|\beta^l\|_{L^\infty(\Omega^l)}^2}{2v^f} \frac{L^e \|\beta^e\|_{L^\infty(\Omega^e)}^2}{2v^l},$$

$$D_1 = \frac{L^f \|\beta^f\|_{L^\infty}^2}{2v^e} + \frac{(L^f \beta_K^f)^2 \|\hat{u}_2^f\|_{L^\infty}^2}{2v^e} + \frac{L^f \|\beta_1^f\|_{L^\infty}^2 \|\hat{u}_2^f\|_{L^\infty} \beta_K^f}{2v^e}$$

alors  $\Lambda$  est contractante.

En supposant que les hypothèses (H1)-(H6) sont satisfaites et le lemme 1 vérifié, le système (4.4) admet une unique solution. En appliquant le changement de variables donné en (9.20), on montre que la solution du problème (3.3)-(3.4)-(3.5) est unique.

**Preuve du lemme 1 :** Soient  $\phi = \phi^1 - \phi^2$  et  $\hat{u}^l = \hat{u}_1^l - \hat{u}_2^l$  des fonctions de  $L^2(\Omega^l)$ . La preuve consiste à trouver une constante  $c$  comprise dans l'intervalle  $[0, 1[$  telle que pour tous  $\phi$  de l'espace  $L^2(\Omega^l)$  on ait l'inégalité suivante

$$\|\hat{u}^l\|_{L^2(\Omega^l)}^2 \leq c \|\phi\|_{L^2(\Omega^l)}^2. \quad (4.5)$$

On définit aussi les fonctions  $\hat{u}^e = \hat{u}_1^e - \hat{u}_2^e$  et  $\hat{u}^f = \hat{u}_1^f - \hat{u}_2^f$ . On multiplie la première équation du système (4.4) par  $\hat{u}^e$ , la deuxième équation par  $\hat{u}^l$  et la troisième par  $\hat{u}^f$ . Ces nouvelles équations sont intégrées sur respectivement les domaines  $\Omega^e$ ,  $\Omega^l$ ,  $\Omega^f$  et se simplifient en,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \left( \lambda + m^e(E(t), a) + \beta^e(E(t), a) + \frac{1}{2} \partial_a v^e(E(t), a) \right) (\hat{u}^e(t, a))^2 dadt = \\ \frac{1}{2} \int_0^T v^e(E(t), 0) (\hat{u}^e(t, 0))^2 dt, \\ \int_{\Omega^l} \left( \lambda + m^l(P_{\phi_1}^l(t), E(t), a) + \beta^l(E(t), a) + \frac{1}{2} \partial_a v^l(E(t), a) \right) (\hat{u}^l(t, a))^2 dadt = \\ - \int_{\Omega^l} \left( m^l(P_{\phi_1}^l(t), E(t), a) - m^l(P_{\phi_2}^l(t), E(t), a) \right) \hat{u}_2^l(t, a) \hat{u}^l(t, a) dadt \\ + \frac{1}{2} \int_0^T v^l(E(t), 0) (\hat{u}^l(t, 0))^2 dt, \\ \int_{\Omega^f} \left( \lambda + m^f(E(t), a) + \frac{1}{2} \partial_a v^f(E(t), a) \right) (\hat{u}^f(t, a))^2 dadt = \\ \frac{1}{2} \int_0^T v^f(E(t), 0) (\hat{u}^f(t, 0))^2 dt. \end{aligned}$$

En majorant les termes négatifs, ce système devient

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega^e} (\hat{u}^e(t, a))^2 dadt &\leq \frac{1}{2} \int_0^T v^e(E(t), 0) (\hat{u}^e(t, 0))^2 dt + C_{v^e} \int_{\Omega^e} (\hat{u}^e(t, a))^2 dadt, \\ \lambda \int_{\Omega^l} (\hat{u}^l(t, a))^2 dadt &\leq \frac{1}{2} \int_0^T v^l(E(t), 0) (\hat{u}^l(t, 0))^2 dt + C_{v^l} \int_{\Omega^l} (\hat{u}^l(t, a))^2 dadt \\ &\quad - \int_{\Omega^l} \left( m^l(P_{\phi_1}^l(t), E(t), a) - m^l(P_{\phi_2}^l(t), E(t), a) \right) \hat{u}_2^l(t, a) \hat{u}^l(t, a) dadt, \quad (4.6) \\ \lambda \int_{\Omega^f} (\hat{u}^f(t, a))^2 dadt &\leq \frac{1}{2} \int_0^T v^f(E(t), 0) (\hat{u}^f(t, 0))^2 dt + C_{v^f} \int_{\Omega^f} (\hat{u}^f(t, a))^2 dadt, \end{aligned}$$

où les premiers termes à droite des inégalités sont donnés par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T v^e(E(t), 0) (\hat{u}^e(t, 0))^2 dt &= \\ \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{v^e(E(t), 0)} \left( \int_0^{L^f} \beta^f(P_1^f) \hat{u}^f(t, s) ds + \int_0^{L^f} (\beta^f(P_1^f) - \beta^f(P_2^f)) \hat{u}_2^f(t, s) ds \right)^2 dt, \\ \frac{1}{2} \int_0^T v^l(E(t), 0) (\hat{u}^l(t, 0))^2 dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{v^l(E(t), 0)} \left( \int_0^{L^e} \beta^e(E(t), s) \hat{u}^e(t, s) ds \right)^2 dt, \\ \frac{1}{2} \int_0^T v^f(E(t), 0) (\hat{u}^f(t, 0))^2 dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{v^f(E(t), 0)} \left( \int_0^{L^l} \beta^l(E(t), s) \phi(t, s) ds \right)^2 dt. \end{aligned}$$

On définit par  $\beta^f(P_1^f)$  le taux de ponte dépendant de la population totale des femelles calculée avec la densité  $\hat{u}_1^f$ . A partir de l'inégalité de Cauchy Schwartz et de l'inégalité de Young, la deuxième équation de (4.6) devient

$$\begin{aligned} (\lambda - C_{v^l}) \int_{\Omega^l} (\hat{u}^l(t, a))^2 dadt &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{v^l(E(t), 0)} \int_0^{L^e} (\beta^e(E(t), s))^2 ds \int_0^{L^e} (\hat{u}^e(t, s))^2 ds dt \\ &+ \int_{\Omega^l} \frac{\epsilon}{2} \left( m^l(P_{\phi_1}^l(t), E(t), a) - m^l(P_{\phi_2}^l(t), E(t), a) \right)^2 dadt \\ &+ \int_{\Omega^l} \frac{1}{2\epsilon} \left( \hat{u}_2^l(t, a) \hat{u}^l(t, a) \right)^2 dadt, \end{aligned}$$

où  $\epsilon$  est une constante positive. Sous les hypothèses H 1 - H 6, on déduit que

$$\begin{aligned} \left( \lambda - C_{v^l} - \frac{\|\hat{u}_2^l\|_{L^\infty}^2}{2\epsilon} \right) \int_{\Omega^l} (\hat{u}^l(t, a))^2 dadt &\leq \frac{L^e \|\beta^e\|_{L^\infty(\Omega^e)}^2}{2v^l} \int_{\Omega^e} (\hat{u}^e)^2(t, s) ds dt \\ &+ \frac{\epsilon}{2} (m_N^l L^l)^2 \int_{\Omega^l} (\phi_1 - \phi_2)^2(t, s) ds dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

On s'intéresse à présent à la première inégalité de (4.6) pour estimer la norme dans l'espace  $L^2(\Omega^e)$  de la densité oeuf. On développe le carré du premier terme à droite de l'inégalité, puis on utilise l'inégalité de Cauchy Schwartz afin d'obtenir l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} (\lambda - C_{v^e}) \int_{\Omega^e} (\hat{u}^e(t, a))^2 dadt &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{v^e(E(t), 0)} \int_0^{L^f} (\beta^f(P_1^f))^2 ds \int_0^{L^f} (\hat{u}^f(t, s))^2 ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{v^e(E(t), 0)} \int_0^{L^f} (\beta^f(P_1^f) - \beta^f(P_2^f))^2 ds \int_0^{L^f} (\hat{u}_2^f(t, s))^2 ds dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{v^e(E(t), 0)} \int_0^{L^f} \beta^f(P_1^f) \hat{u}^f(t, s) ds \int_0^{L^f} (\beta^f(P_1^f) - \beta^f(P_2^f)) \hat{u}_2^f(t, s) ds dt. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses H 1 - H 6, on obtient l'estimation de la norme dans l'espace  $L^2(\Omega^e)$  de la densité oeuf

$$(\lambda - C_{v^e}) \int_{\Omega^e} (\hat{u}^e(t, a))^2 dadt \leq D_1 \int_{\Omega^f} (\hat{u}^f(t, s))^2 ds, \quad (4.8)$$

où  $D_1$  est une constante positive égale à

$$D_1 = \frac{L^f \|\beta^f\|_{L^\infty}^2}{2v^e} + \frac{(L^f \beta_K^f)^2 \|\hat{u}_2^f\|_{L^\infty}^2}{2v^e} + \frac{L^f \|\beta_1^f\|_{L^\infty}^2 \|\hat{u}_2^f\|_{L^\infty} \beta_K^f}{2v^e}.$$

Enfin, on utilise la troisième inégalité de (4.6) pour estimer la norme dans l'espace  $L^2(\Omega^f)$  de la densité des femelles. Pour cela, on applique l'inégalité de Cauchy Schwartz sur le premier terme à droite de l'inégalité tel qu'on ait

$$(\lambda - C_{vf}) \int_{\Omega^f} (\hat{u}^f(t, a))^2 dadt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{v^f(E(t), 0)} \int_0^{L^l} (\beta^l(E(t), s))^2 ds \int_0^{L^l} (\phi(t, s))^2 ds.$$

Sous les hypothèses H 1 - H 6, on obtient l'estimation suivante

$$(\lambda - C_{vf}) \int_{\Omega^f} (\hat{u}^f(t, a))^2 dadt \leq \frac{L^l \|\beta^l\|_{L^\infty(\Omega^l)}^2}{2\underline{v}^f} \int_{\Omega^l} (\phi(t, s))^2 ds. \quad (4.9)$$

Finalement, en utilisant les estimations (4.8) et (4.9), l'inégalité (4.7) devient

$$\left( \lambda - C_{vl} - \frac{\|\hat{u}_2^l\|_{L^\infty}^2}{2\epsilon} \right) (\lambda - C_{ve}) (\lambda - C_{vf}) \int_{\Omega^l} (\hat{u}^l(t, a))^2 dadt \leq \left( D + (\lambda - C_{ve}) (\lambda - C_{vf}) \frac{\epsilon}{2} (m_N^l L^l)^2 \right) \int_{\Omega^l} (\phi)^2(t, s) dsdt,$$

où  $D$  est une constante positive égale à

$$D = D_1 \frac{L^l \|\beta^l\|_{L^\infty(\Omega^l)}^2}{2\underline{v}^f} \frac{L^e \|\beta^e\|_{L^\infty(\Omega^e)}^2}{2\underline{v}^l}.$$

L'inégalité (4.5) est alors démontrée pour  $c$  égal à

$$c = \frac{(D + (\lambda - C_{ve}) (\lambda - C_{vf}) \frac{\epsilon}{2} (m_N^l L^l)^2)}{\left( \lambda - C_{vl} - \frac{\|\hat{u}_2^l\|_{L^\infty}^2}{2\epsilon} \right) (\lambda - C_{ve}) (\lambda - C_{vf})},$$

qui est défini dans l'intervalle  $[0, 1]$  pour  $\epsilon$  fixé positif et pour  $\lambda$  choisit grand tel que la relation suivante soit vérifiée

$$\left( D + (\lambda - C_{ve}) (\lambda - C_{vf}) \frac{\epsilon}{2} (m_N^l L^l)^2 \right) < \left( \lambda - C_{vl} - \frac{\|\hat{u}_2^l\|_{L^\infty}^2}{2\epsilon} \right) (\lambda - C_{ve}) (\lambda - C_{vf}). \quad \square$$

## Chapitre 5

# Analyse numérique du modèle *Lobesia botrana*.

On développe un schéma numérique pour approcher la solution des modèles *Lobesia botrana* annuel et pluriannuel. Une analyse sur les propriétés du schéma est proposée.

On s'est intéressé dans la littérature aux schémas numériques développés sur les équations structurées. Ils sont construits directement à partir de l'équation ou de l'expression mathématique de la solution calculée avec une méthode des caractéristiques. Douglas et Milner (1987) développent un schéma aux différences finies (DF) sur l'équation de Von Förster-McKendrick, avec une fonction de mortalité dépendant de la population totale. Ce schéma est repris par Know et al. (1993) qui l'améliore pour obtenir une précision du schéma à l'ordre deux. Cette méthode d'approximation est appliquée sur le modèle de Sinko et Streifer par Sulsky (1993). Elle propose 3 autres schémas pour cette équation : un schéma de Lax-Wendroff (méthode d'Euler explicite), et deux schémas volumes finis (VF) qui se différencient par leur maillage. Sur un exemple, elle montre que les schémas VF, qui ont une précision d'ordre 2 en temps, approchent le mieux la solution du modèle. Les modèles non linéaires de la dynamique des populations structurées par rapport à la taille sont étudiés par Angulo (2000 ; 2004) ou Kostova (2003) par exemple. Leur schéma est construit à partir de l'expression mathématique de la solution formulée le long des caractéristiques. La précision de ces schémas est d'ordre 2 pour Angulo et al. et d'ordre 3 pour Kostova. On propose d'approcher les équations de nos modèles Eudémis par un schéma VF, méthode généralement utilisée sur les équations hyperboliques comme celles qui constituent notre modèle. L'étude de la stabilité, de la régularité, et la convergence du schéma vers la solution du modèle Eudémis annuel sont établies. La méthode développée pour ce modèle est transposable au modèle pluriannuel ainsi que les preuves sur les propriétés du schéma.

Pour alléger les calculs, on simplifie le modèle *Lobesia botrana* en supprimant l'équation modélisant la dynamique des mâles. Cette équation est la même que celle décrivant la dynamique des femelles avec des conditions aux bords similaires. Le schéma numérique développé pour l'une ou l'autre de ces équations est par conséquent identique. On dénote par  $L$  l'âge maximal de vie de tous les stades de développement afin d'alléger les notations. Ces modifications n'affectent pas la construction du schéma.

## 5.1 Construction du schéma numérique.

Soit  $\Delta t$  le pas de discrétisation en temps. On subdivise l'intervalle  $[0, T]$  en  $N_t + 1$  points  $t^n$  tels que pour  $n = 0$  on ait  $t^0 = 0$  et pour  $n = N_t$  on ait  $t^{N_t} = T$ . Le calcul de  $t^n$  est donné par

$$t^n = n\Delta t, \quad n = 0, N_t$$

L'intervalle des âges est discrétisé en  $N_a + 1$  points avec la décomposition suivante

$$[0, L] = \cup_i [a_{i-\frac{1}{2}}, a_{i+\frac{1}{2}}[ = \cup_i C_i \quad i = 0, N_a,$$

où  $C_i$  est le volume de contrôle à la maille  $i$ . Les points du maillage sont donnés par la formule

$$a_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})\Delta a, \quad i = 0, N_a - 1,$$

où  $\Delta a$  est le pas de discrétisation en âge. Le volume de contrôle  $C_0$  correspond à l'intervalle  $[0, \frac{\Delta a}{2}[$  et celui pour  $i = N_a$  à l'intervalle  $[L - \frac{\Delta a}{2}, L[$ .

On suppose que la condition initiale du modèle *Lobesia botrana* annuel est une fonction continue et dérivable. Sous ces conditions, elle peut être approchée par la valeur moyenne sur chaque maille  $i$

$$u_i^{k,0} = \frac{1}{\Delta a} \int_{C_i} u_0^k(x) dx, \quad k = e, l, f.$$

On note  $u_\Delta^k$  la solution approchée de l'équation décrivant la dynamique de la population du stade  $k$ . Elle est définie sur l'espace  $V^k$  qui est égale à l'ensemble

$$u^k(t, a) = u_i^{k,n} \geq 0, \quad (t, a) \in [t^n, t^{n+1}[ \times C_i, \quad i = 1, N_a, \quad n > 0.$$

Les fonctions  $\beta^k$  et  $m^k$  sont approchées sur le maillage par les fonctions  $\beta_\Delta^k$  et  $m_\Delta^k$ . Sur le volume  $C_i \times [t^n, t^{n+1}[$ , elles sont égales à

$$\beta^k(t, a) = \beta_i^{k,n}, \quad m^k(t, a) = m_i^{k,n},$$

pour  $i = 0, N_a$  et  $n > 0$ . A  $n \geq 0$  fixé, la solution calculée par le schéma pour l'équation associée au stade de développement  $k$  est donnée par  $U^{k,n}$  c'est à dire  $(u_1^{k,n}, u_2^{k,n}, \dots, u_{N_a}^{k,n})^T$ .

Le schéma VF s'obtient en intégrant les équations du modèle annuel (3.3) sur le domaine  $[0, T] \times [0, L]$ . On définit la condition CFL par

$$0 < \frac{\Delta t}{\Delta a} \max_k v_\infty^k \leq 1, \quad k = e, l, f.$$

Le terme à droite de l'égalité pour chaque équation du système (3.3) est traité en implicite, ainsi la discrétisation d'une équation de ce système s'écrit

$$u_i^{k,n+1} = \frac{u_i^{k,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a} v_i^{k,n}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} v_{i-1}^{k,n} u_{i-1}^{k,n}}{1 + \Delta t m_i^{k,n+1} + \Delta t \beta_i^{k,n+1}}, \quad i = 1, N_a,$$

où le calcul de  $u_i^{k,n+1}$  à la maille 0 est donné par la relation

$$v_0^{k,n+1} u_0^{k,n+1} = \Delta a \sum_{j=1}^{N_a} \beta_j^{q,n+1} u_j^{q,n+1},$$

L'indice  $q$  désigne le stade de développement précédent le stade  $k$ . Le schéma complet du modèle annuel s'écrit alors

$$\begin{bmatrix} B^{e,n+1} & 0 & 0 \\ 0 & B^{l,n+1} & 0 \\ 0 & 0 & E^{f,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{e,n+1} \\ U^{l,n+1} \\ U^{f,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{e,n} & 0 & \Delta a C^{f,n} \\ \Delta a C^{e,n} & A^{l,n} & 0 \\ 0 & \Delta a C^{l,n} & A^{f,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{e,n} \\ U^{l,n} \\ U^{f,n} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

où  $B^{k,n+1}$ ,  $E^{f,n+1}$ ,  $A^{k,n}$  et  $C^{k,n}$  sont les matrices définies pour un stade de développement  $k$  et données par

$$B^{k,n+1} = \begin{bmatrix} 1 + \Delta t(m_1^{k,n+1} + \beta_1^{k,n+1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 + \Delta t(m_{N_a}^{k,n+1} + \beta_{N_a}^{k,n+1}) \end{bmatrix}$$

pour  $k = e, l$ ,

$$E^{f,n+1} = \begin{bmatrix} (1 + \Delta t m_1^{f,n+1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & (1 + \Delta t m_{N_a}^{f,n+1}) \end{bmatrix}$$

$$A^{k,n} = \begin{bmatrix} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a} v_1^{k,n}) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\Delta t}{\Delta a} v_1^{k,n} & (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a} v_2^{k,n}) & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{\Delta t}{\Delta a} v_{N_a-1}^{k,n} & (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a} v_{N_a}^{k,n}) \end{bmatrix}$$

pour  $k = e, l, f$ . Enfin,  $C^{k,n} = (\beta_1^{k,n}, \dots, \beta_{N_a}^{k,n})^T$ . Les matrices  $B^{k,n}$  pour  $k = e, l$  et  $E^{f,n}$  sont diagonales à coefficients positives, elles sont donc inversibles. Sous la condition de la CFL, les matrices  $A^{k,n}$  sont aussi définies positives à diagonales inférieures, elles sont donc inversibles.

## 5.2 Analyse du schéma numérique.

On étudie la positivité et la stabilité en temps et en âge de notre schéma numérique. Ces propriétés seront utilisées pour démontrer la convergence du schéma vers la solution du modèle. Le premier lemme est consacré à la positivité du schéma.

On rappelle la définition des normes discrètes sur l'espace  $\mathfrak{R}^{N_a}$

$$\|U^{k,n}\|_1 = \sum_{i=1}^{N_a} |u_i^{k,n}|, \quad \|U^{k,n}\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq N_a} |u_i^{k,n}|$$

et celle de la variation en âge d'un vecteur de taille  $N_a$

$$U^{k,n} \in BV([0, L]) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{N_a-1} |u_{i+1}^{k,n} - u_i^{k,n}| \leq c, \quad c > 0.$$

Par analogie aux hypothèses H 1-H 6 faites pour l'étude analytique du modèle, on a

$H' 1$

$$0 < \bar{v}^k < v_\infty^{k,n} = \|v^{k,n}\|_\infty < v_\infty^k \quad k = e, l, f,$$

$H' 2$

$$0 < \beta_\infty^{k,n} = \|\beta^{k,n}\|_\infty < \beta_\infty^k, \quad \|\beta^{k,n}\|_1 < \beta_1^k, \quad \beta^{k,n} \in BV([0, L]), \quad n = 0, N_t, \quad k = e, l, f,$$

$H' 3$

$$0 < m_\infty^{k,n} = \|m^{k,n}\|_\infty < m_\infty^k, \quad m^{k,n} \in BV([0, L]), \quad n = 0, N_t, \quad k = e, l, f,$$

$H' 4$

$$0 < \|u_0^k\|_\infty, \|u_0^k\|_1 < \infty, \quad u_0^k \in BV([0, L]), \quad n = 0, N_t, \quad k = e, l, f.$$

**Lemme 2** *Le schéma VF donné par (5.1) conserve la positivité c'est à dire que*

$$\begin{aligned} (u_i^{e,n}, u_i^{l,n}, u_i^{f,n}) &\geq 0, \quad i = 1, N_a, \quad n > 0, \\ \Rightarrow (u_i^{e,n+1}, u_i^{l,n+1}, u_i^{f,n+1}) &\geq 0, \quad i = 1, N_a, \quad n > 0. \end{aligned}$$

**Preuve :** Soit  $U^{k,n+1}$  la solution du schéma numérique à l'instant  $n + 1$  obtenue pour le stade de développement  $k$ . En valeur absolue, cette solution est égale à

$$|u_i^{k,n+1}| = \left| \frac{u_i^{k,n}(1 - v_i^{k,n} \frac{\Delta t}{\Delta a}) + v_{i-1}^{k,n} \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{k,n}}{1 + \Delta t m_i^{k,n+1} + \Delta t \beta_i^{k,n+1}} \right|, \quad i = 1, N_a. \quad (5.2)$$

Les fonctions démographiques sont strictement positives, par conséquent le dénominateur de (5.2) est strictement positif. La CFL nous informe que

$$0 \leq 1 - v_i^{k,n} \frac{\Delta t}{\Delta a} \leq 1, \quad i = 1, N_a.$$

Cette donnée nous permet de conclure sur la positivité du numérateur de la solution  $U^{k,n+1}$

$$u_i^{k,n}(1 - v_i^k \frac{\Delta t}{\Delta a}) + v_{i-1}^{k,n} \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{k,n} > 0, \quad i = 1, N_a.$$

On conclut alors que

$$u_i^{k,n+1} \geq 0, \quad i = 1, N_a, \quad k = e, l, f. \quad \square$$

**Lemme 3** Soit  $u_0^k \in L^1([0, L])$  pour  $k = e, l, f$ . Le schéma VF donné par (5.1) est stable pour la norme discrète  $l^1([0, L])$  :

$$\max_k \|U^{k,n}\|_1 \leq c \max_k \|u_0^k\|_1$$

où  $c$  est une constante positive.

**Preuve :** Pour  $k$  égal à  $e, l, f$ , on considère la solution du schéma numérique sous la forme

$$u_i^{k,n+1} = u_i^{k,n} - \frac{\Delta t}{\Delta a} (v_i^{k,n} u_i^{k,n} - v_{i-1}^{k,n} u_{i-1}^{k,n}) - \Delta t \beta_i^{k,n+1} u_i^{k,n+1} - \Delta t m_i^{k,n+1} u_i^{k,n+1}.$$

On prend la valeur absolue de cette équation puis on la somme sur toutes les mailles. Grâce à la positivité du schéma on en déduit,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_a} |u_i^{k,n+1}| &= \sum_{i=1}^{N_a} u_i^{k,n} - \frac{\Delta t}{\Delta a} \sum_{i=1}^{N_a} v_i^{k,n} u_i^{k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta a} \sum_{i=0}^{N_a-1} v_i^{k,n} u_i^{k,n} \\ &\quad - \Delta t \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^{k,n+1} u_i^{k,n+1} - \Delta t \sum_{i=1}^{N_a} m_i^{k,n+1} u_i^{k,n+1}. \end{aligned}$$

Les deuxième et troisième termes s'annulent sauf aux mailles 0 et  $N_a$ . Les deux dernières sommes sont négatives et peuvent être majorées par 0. L'équation du dessus devient alors l'inégalité suivante

$$\sum_{i=1}^{N_a} |u_i^{k,n+1}| \leq \sum_{i=1}^{N_a} u_i^{k,n} - \frac{\Delta t}{\Delta a} v_{N_a}^{k,n} u_{N_a}^{k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta a} v_0^{k,n} u_0^{k,n}.$$

La solution du stade de développement  $k$  à l'instant  $n$  et à la maille 0 est remplacée par son expression donnée dans 5.1 alors que celle à la maille  $N_a$  est majorée par 0, on a

$$\sum_{i=1}^{N_a} |u_i^{k,n+1}| \leq \sum_{i=1}^{N_a} u_i^{k,n} + \Delta t \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^q u_i^{q,n},$$

où  $k$  est égal à  $e, l, f$  et l'indice  $q$  est égal à respectivement  $f, e, l$ . Cette inégalité est la même quelque soit la valeur du couple d'indices  $(k, q)$ , on pose alors

$$F^n = \max_k \|U^{k,n}\|_1 \quad \text{et} \quad \beta^\infty = \max_k \beta_\infty^k,$$

l'inégalité devient

$$F^{n+1} \leq F^n + \Delta t \beta^\infty F^n.$$

Par récurrence et en approchant  $e^{n\Delta t(1+\Delta t\beta^\infty)}$  par  $e^{n\Delta t\beta^\infty}$  on a finalement

$$F^{n+1} \leq F^0 e^{T\beta^\infty}.$$

Le schéma est stable pour la norme  $l^1([0, L])$  avec  $c$  égal à  $e^{T\beta^\infty}$ .  $\square$

**Lemme 4** Soit  $u_0^k \in L^\infty([0, L])$  pour  $k = e, l, f$ . Le schémas VF donné par (5.1) est stable pour la norme discrète  $l^\infty([0, L])$  sous la condition de CFL,

$$\max_k \|U^{k,n}\|_\infty \leq d \max_k \|u_0^k\|_\infty$$

où  $d$  est une constante positive.

**Preuve :** Pour  $k$  égal à  $e, l, f$ , on considère la solution du schéma numérique sous la forme

$$u_i^{k,n+1} = u_i^{k,n} - \frac{\Delta t}{\Delta a} (v_i^{k,n} u_i^{k,n} - v_{i-1}^{k,n} u_{i-1}^{k,n}) - \Delta t \beta_i^{k,n+1} u_i^{k,n+1} - \Delta t m_i^{k,n+1} u_i^{k,n+1}. \quad (5.3)$$

A partir du lemme (2), c'est à dire sous la condition CFL, et en majorant les termes négatifs, la solution du stade de développement  $k$  à l'instant  $n+1$  et à la maille  $i$  différent de 1 devient

$$|u_i^{k,n+1}| \leq u_i^{k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta a} v_{i-1}^{k,n} u_{i-1}^{k,n} - \frac{\Delta t}{\Delta a} v_i^{k,n} u_i^{k,n}. \quad (5.4)$$

La vitesse est une fonction Lipschitzienne de constante positive  $v_\infty^k$ , c'est à dire

$$v_{i-1}^{k,n} = v_i^{k,n} + v_\infty^k \Delta a, \quad i = 1, N_a.$$

En injectant cette relation dans l'inégalité (5.4) et en prenant la borne supérieure sur toutes les mailles  $i$  différentes de 1, on a

$$\sup_{i \neq 1} |u_i^{k,n+1}| \leq (1 + \Delta t v_\infty^k) \sup_{i \neq 1} |u_i^{k,n}|$$

Par récurrence, on obtient la relation

$$\max_k \{ \sup_{i \neq 1} |u_i^{k,n+1}| \} \leq e^{T \max_k (v_\infty^k)} \max_k \{ \sup_{i \neq 1} |u_{0,i}^k| \}, \quad k = e, l, f.$$

A la maille 1, le schéma (5.3) s'écrit

$$u_1^{k,n+1} = u_1^{k,n} - \frac{\Delta t}{\Delta a} v_1^{k,n} u_1^{k,n} + \Delta t \sum_{j=1}^{N_a} \beta_j^{q,n} u_j^{q,n} - \Delta t \beta_1^{k,n+1} u_1^{k,n+1} - \Delta t m_1^{k,n+1} u_1^{k,n+1},$$

où  $q$  désigne le stade de développement précédent le stade  $k$ . Sous la CFL et en prenant la borne supérieure, on a

$$|u_1^{k,n+1}| \leq (1 + \Delta t \beta_1^q) \sup_{1 \leq i \leq N_a} |u_i^{q,n}|.$$

Par récurrence, cette inégalité devient

$$\max_k \{ |u_1^{k,n+1}| \} \leq e^{T \max_k (\beta_1^k)} \max_k \{ \sup_{1 \leq i \leq N_a} |u_i^{k,n}| \}.$$

Le lemme est alors démontré pour  $d$  égal à

$$d = \max \{ e^{T \max_k (v_\infty^k)}, e^{T \max_k (\beta_1^k)} \}. \quad \square$$

Ces deux derniers lemmes montrent que le schéma n'explose pas même en temps long. On souhaite à présent démontrer que la solution du système (5.1) converge vers la solution du problème (3.3). Pour cela, on a besoin des deux lemmes suivants.

**Lemme 5** Soit  $u_0^k \in (L^1 \cap L^\infty)([0, L])$  et  $u_0^k \in BV([0, L])$  alors, sous la condition de CFL,  $\max_k (U^{k,n}) \in BV([0, L])$  pour tous  $n > 0$ , précisément

$$\max_k \left( \sum_{i=0}^{N_a} |u_{i+1}^{k,n} - u_i^{k,n}| \right) \leq K_1 \max_k \left( \sum_{i=0}^{N_a} |u_{i+1}^{k,0} - u_i^{k,0}| \right) \\ K_2 \max_k \|u_0^k\|_1 + K_3 \max_k \|u_0^k\|_\infty,$$

pour  $n > 0$  avec  $K_1, K_2$  et  $K_3$  des constantes positives indépendantes de  $n$ .

**Preuve :** Pour alléger les calculs on pose  $h_i^{k,n}$  égal à  $\beta_i^{k,n} + m_i^{k,n}$  qui est positif sur toutes les mailles  $i$ , et à tous les instants  $n$ . On considère la solution du schéma numérique du stade de développement  $k$  à l'instant  $n + 1$  et à la maille  $i$  sous la forme

$$u_i^{k,n+1} = u_i^{k,n} - \frac{\Delta t}{\Delta a}(v_i^{k,n}u_i^{k,n} - v_{i-1}^{k,n}u_{i-1}^{k,n}) - \Delta t h_i^{k,n+1} u_i^{k,n+1}. \quad (5.5)$$

La variation bornée en espace du vecteur  $U^{k,n+1}$  se décompose en deux termes de la façon suivante

$$\sum_{i=0}^{N_a-1} |u_{i+1}^{k,n+1} - u_i^{k,n+1}| = \sum_{i=1}^{N_a-1} |u_{i+1}^{k,n+1} - u_i^{k,n+1}| + |u_1^{k,n+1} - u_0^{k,n+1}|.$$

On estime ces termes l'un après l'autre. On commence par la somme. On calcule la différence des solutions du stade de développement  $k$  à l'instant  $n + 1$  donnée par l'équation (5.5) entre deux mailles consécutives

$$\begin{aligned} u_{i+1}^{k,n+1} - u_i^{k,n+1} &= (u_{i+1}^{k,n} - u_i^{k,n}) - \frac{\Delta t}{\Delta a}(v_{i+1}^{k,n}u_{i+1}^{k,n} - v_i^{k,n}u_i^{k,n}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta a}(v_i^{k,n}u_i^{k,n} - v_{i-1}^{k,n}u_{i-1}^{k,n}) - \Delta t(h_{i+1}^{k,n+1}u_{i+1}^{k,n+1} - h_i^{k,n+1}u_i^{k,n+1}). \end{aligned}$$

On pose  $\delta_{i+1}^{k,n+1}$  égal à  $u_{i+1}^{k,n+1} - u_i^{k,n+1}$  de tel sorte que l'équation précédente s'écrive

$$\begin{aligned} \delta_{i+1}^{k,n+1} &= \delta_{i+1}^{k,n} - \frac{\Delta t}{\Delta a}v_{i+1}^{k,n}\delta_{i+1}^{k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta a}v_i^{k,n}\delta_i^{k,n} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta a}(v_{i+1}^{k,n} - v_i^{k,n})\delta_i^{k,n} - \frac{\Delta t}{\Delta a}(v_{i+1}^{k,n} - 2v_i^{k,n} + v_{i-1}^{k,n})u_{i-1}^{k,n} \\ &\quad - \Delta t h_{i+1}^{k,n+1}\delta_{i+1}^{k,n+1} - \Delta t u_i^{k,n+1}(h_{i+1}^{k,n+1} - h_i^{k,n+1}). \end{aligned}$$

On multiplie chaque terme de l'équation par  $s_i^{k,n+1}$  qui est le signe de  $\delta_i^{k,n+1}$ , puis on somme sur les mailles allant de 1 à  $N_a - 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_a-1} s_{i+1}^{k,n+1}\delta_{i+1}^{k,n+1} &= \sum_{i=1}^{N_a-1} s_{i+1}^{k,n}\delta_{i+1}^{k,n} - \frac{\Delta t}{\Delta a} \sum_{i=1}^{N_a-1} v_{i+1}^k s_{i+1}^{k,n}\delta_{i+1}^{k,n} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta a} \sum_{i=1}^{N_a-1} v_i^k s_i^{k,n}\delta_i^{k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta a} \sum_{i=1}^{N_a-1} |v_{i+1}^k - v_i^k| s_i^{k,n}\delta_i^{k,n} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta a} \sum_{i=1}^{N_a-1} |v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k| u_{i-1}^{k,n} - \Delta t \sum_{i=1}^{N_a-1} |h_{i+1}^{k,n+1}| s_{i+1}^{k,n+1}\delta_{i+1}^{k,n+1} \\ &\quad + \Delta t \sum_{i=1}^{N_a-1} u_i^{k,n+1} |h_{i+1}^{k,n+1} - h_i^{k,n+1}|. \end{aligned}$$

Cette dernière équation se simplifie en additionnant les deuxième et troisième termes et en majorant ceux négatifs

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_a-1} s_{i+1}^{k,n+1}\delta_{i+1}^{k,n+1} &\leq \sum_{i=1}^{N_a-1} s_{i+1}^{k,n}\delta_{i+1}^{k,n} - \frac{\Delta t}{\Delta a}v_{N_a}^k s_{N_a}^{k,n}\delta_{N_a}^{k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta a}v_1^k s_1^{k,n}\delta_1^{k,n} \\ &\quad + \Delta t v_\infty^k \sum_{i=1}^{N_a-1} s_i^{k,n}\delta_i^{k,n} + \Delta t \epsilon^k \|u^{k,n}\|_1 + \Delta t \|u^{k,n+1}\|_\infty B^k, \end{aligned}$$

où  $B^k$  est la borne de la variation bornée du vecteur  $h^{k,n}$  pour tous les instants  $n$  et  $\epsilon^k$  est donnée par

$$|v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k| \leq \epsilon^k \Delta a, \quad \text{où,} \quad |d_i^{k,n} - d_{i+1}^{k,n}| \leq \epsilon^k.$$

Par définition, on a

$$\sum_{i=1}^{N_a-1} s_{i+1}^{k,n+1} \delta_{i+1}^{k,n+1} = \sum_{i=1}^{N_a-1} |\delta_{i+1}^{k,n+1}|.$$

On déduit alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_a-1} |\delta_{i+1}^{k,n+1}| &\leq \sum_{i=1}^{N_a-1} |\delta_{i+1}^{k,n}| + \frac{\Delta t}{\Delta a} v_\infty^k |\delta_1^{k,n}| + \Delta t v_\infty^k \sum_{i=1}^{N_a-1} |\delta_i^{k,n}| + \Delta t \epsilon^k \|u^{k,n}\|_1 \\ &\quad + \Delta t \|u^{k,n+1}\|_\infty B^k. \end{aligned}$$

On fait l'estimation du terme de bord. La différence des solutions du stade de développement  $k$  à l'instant  $n+1$  entre les mailles 1 et 0, c'est à dire l'estimation de  $\delta_1^{k,n+1}$ , est égal à

$$\begin{aligned} \delta_1^{k,n+1} &= \delta_1^{k,n} - (u_0^{k,n+1} - u_0^{k,n}) - \frac{\Delta t}{\Delta a} v_1^{k,n} \delta_1^{k,n} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta a} (v_0^{k,n} - v_1^{k,n}) u_0^{k,n} - \Delta t h_1^{k,n+1} u_1^{k,n+1}. \end{aligned}$$

On multiplie chaque terme par  $s_1^{k,n+1}$  qui est le signe de  $\delta_1^{k,n+1}$

$$\begin{aligned} s_1^{k,n+1} \delta_1^{k,n+1} &= s_1^{k,n} \delta_1^{k,n} - (u_0^{k,n+1} - u_0^{k,n}) - \frac{\Delta t}{\Delta a} v_1^{k,n} s_1^{k,n} \delta_1^{k,n} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta a} (v_0^{k,n} - v_1^{k,n}) u_0^{k,n} - \Delta t h_1^{k,n+1} u_1^{k,n+1}. \end{aligned}$$

Sachant que  $s_1^{k,n+1} \delta_1^{k,n+1}$  est égal à  $|\delta_1^{k,n+1}|$ , on a

$$|\delta_1^{k,n+1}| \leq |\delta_1^{k,n}| + |u_0^{k,n+1} - u_0^{k,n}| + \Delta t v_\infty^k \|u^{k,n}\|_\infty - \frac{\Delta t}{\Delta a} v_1^{k,n} s_1^{k,n} \delta_1^{k,n}$$

L'estimation du deuxième terme de cette équation est donnée par

$$\begin{aligned} |u_0^{k,n+1} - u_0^{k,n}| &\leq \frac{\|\beta^{q,n}\|_\infty}{\bar{v}^k} \sum_{i=1}^{N_a} |u_i^{q,n+1} - u_i^{q,n}| \Delta a \\ &\quad + \left( 2 \frac{\beta_\infty^q v_\infty^q}{(\bar{v}^k)^2} \right) \sum_{i=1}^{N_a} |u_i^{q,n}| \Delta a. \end{aligned} \quad (5.6)$$

A partir de (5.5), la première somme de (5.6) s'exprime en fonction de  $\delta_i^{q,n}$ ,

$$\sum_{i=1}^{N_a} |u_i^{q,n+1} - u_i^{q,n}| \Delta a \leq \Delta t v_\infty^q \sum_{i=1}^{N_a} |\delta_i^{q,n}| + v_\infty^q \Delta t \|u^{q,n}\|_\infty \quad (5.7)$$

alors que la deuxième somme est donnée par

$$\sum_{i=1}^{N_a} |u_i^{q,n}| \Delta a \leq \|u_0^q\|_1 + \Delta t v_\infty^q \|u^{q,n}\|_\infty \quad (5.8)$$

Finalement, l'estimation de la variation bornée est égal à

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_a-1} |\delta_{i+1}^{k,n+1}| &\leq \sum_{i=1}^{N_a-1} |\delta_{i+1}^{k,n}| + \Delta t v_\infty^k \sum_{i=0}^{N_a-1} |\delta_i^{k,n}| + \Delta t \epsilon^k \|u^{k,n}\|_1 \\ &\quad + \Delta t B^k \|u^{k,n+1}\|_\infty + |u_0^{k,n+1} - u_0^{k,n}| + \Delta t v_\infty^k \|u^{k,n}\|_\infty, \end{aligned}$$

où l'avant dernier terme est défini par (5.6)-(5.7) et (5.8). On pose

$$F^n = \max_k BV(u^{k,n}), \quad H = \max_k B^k, \quad \bar{v} = \max_k \bar{v}^k, \quad E = \max_k \epsilon^k,$$

l'inégalité du dessus devient

$$\begin{aligned} F^{n+1} &\leq F^n (1 + 2\Delta t \max_k v_\infty^k) + \Delta t E \max_k \|u^{k,n}\|_1 \\ &\quad + \Delta t H \max_k \|u^{k,n+1}\|_\infty + \Delta t \max_k v_\infty^k \max_k \|u^{k,n}\|_\infty \left( \frac{H}{\bar{v}} + \eta \right) \\ &\quad + \eta \max_k \|u_0^k\|_\infty, \end{aligned}$$

où  $\eta = 2 \frac{\max_k (\beta_\infty^k) v_\infty}{(\bar{v})^2}$  est strictement positif. Grâce aux lemmes (3) et (4) précédents, on déduit que

$$F^{n+1} \leq F^n \left[ 1 + 2\Delta t \max_k v_\infty^k \right] + \Delta t C_1 \max_k \|u_0^k\|_1 + \Delta t C_2 \max_k \|u_0^k\|_\infty$$

où  $C_1 = Ed$ , et  $C_2 = Hc + c \max_k v_\infty^k \left( \frac{H}{\bar{v}} + \eta \right) + \eta$  sont des constantes strictement positives et indépendantes de  $n$ . Par récurrence,

$$F^{n+1} \leq F^0 \left[ 1 + 2\Delta t \max_k v_\infty^k \right]^n + \Delta t D \sum_{i=1}^n \left[ 1 + 2\Delta t \max_k v_\infty^k \right]^{i-1}$$

avec  $D = C_1 \max_k \|u_0^k\|_1 + C_2 \max_k \|u_0^k\|_\infty$ . Le terme  $2 \max_k v_\infty^k$  est strictement positive, on déduit que le vecteur  $\max_k U^{k,n}$  est à variation bornée, c'est à dire

$$F^{n+1} \leq K_1 F^0 + K_2 \max_k \|u_0^k\|_1 + K_3 \max_k \|u_0^k\|_\infty$$

où  $K_1 = e^{2T \max_k v_\infty^k}$ ,  $K_2 = TC_1 e^{2T \max_k v_\infty^k}$  et  $K_3 = TC_2 e^{2T \max_k v_\infty^k}$ .  $\square$

Le lemme suivant permet d'obtenir la variation bornée en temps de la solution approchée, propriété nécessaire pour la preuve du théorème de convergence.

**Lemme 6** Soit  $u_0^k \in (L^1([0, L]) \cap L^\infty([0, L]))$  et  $u_0^k \in BV([0, L])$  alors, sous la condition de CFL, on a

$$\begin{aligned} \max_k \|u^{k,n+1} - u^{k,n}\|_1 &\leq L_1 \max_k \|u_0^k\|_\infty \\ &\quad L_2 \max_k \|u_0^k\|_1 + L_3 \max_k \|u_0^k\|_\infty, \end{aligned}$$

pour tous  $n$  strictement positifs avec  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  des constantes positives indépendantes de  $n$ .

**Preuve :** Pour alléger les calculs on pose  $h_i^{k,n}$  égal à  $\beta_i^{k,n} + m_i^{k,n}$  qui est positif sur toutes les mailles  $i$ , et à tous les instants  $n$ . La différence des solutions du stade de développement  $k$  à la maille  $i$  entre les instants  $n + 1$  et  $n$  s'écrit, d'après l'équation (5.5)

$$u_i^{k,n+1} - u_i^{k,n} = -\frac{\Delta t}{\Delta a} v_i^{k,n} (u_i^{k,n} - u_{i-1}^{k,n}) - \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{k,n} (v_i^{k,n} - v_{i-1}^{k,n}) - \Delta t h_i^{k,n+1} u_i^{k,n+1}.$$

On prend la valeur absolue de cette dernière équation, puis on la somme sur les mailles allant de 1 à  $N_a$ ,

$$\sum_{i=1}^{N_a} |u_i^{k,n+1} - u_i^{k,n}| \leq \frac{\Delta t}{\Delta a} v_\infty^k \sum_{i=1}^{N_a} |u_i^{k,n} - u_{i-1}^{k,n}| + \Delta t v_\infty^k \|u^{k,n}\|_1 + \Delta t h_\infty^k \|u^{k,n+1}\|_1.$$

D'après les lemmes (3) et (5) et en supposant la CFL vérifiée, on a

$$\max_k \sum_{i=1}^{N_a} |u_i^{k,n+1} - u_i^{k,n}| \leq K_1 F^0 + (K_2 + \Delta t \max_k v_\infty^k d) \max_k \|u_0^k\|_1 + K_3 \max_k \|u_0^k\|_\infty$$

où toutes les constantes sont strictement positives.  $\square$

### 5.3 Convergence $L^1$ du schéma VF.

Pour obtenir la convergence des schémas on se sert du théorème de compacité d'Helly (Brezis, 1983).

**Théorème 2** Soit  $u_0^k \in (L^1([0, L]) \cap L^\infty([0, L]))$  et  $u_0^k \in BV([0, L])$  pour tous  $k$  égal à  $e, l, f$ . Soit les fonctions  $u_\Delta^k$  calculées par le schéma (5.1) sous la condition de CFL. Dès que les pas de discrétisation tendent vers la valeur nulle alors on peut extraire une sous suite qui converge vers  $u^k$  et cette limite est solution faible du problème (3.3)-(3.4)-(3.5) pour tous  $k$  égal à  $e, l, f$ .

**Preuve :** On démontre ce théorème en deux étapes. Dans la première on prouve la convergence du schéma vers une limite qui est bornée et à dérivées bornées. Puis dans un deuxième temps, on montre que cette solution vérifie

$$\int_0^T \int_0^L \left( \partial_t u_\Delta^k + \partial_a (v^k(t, a) u_\Delta^k(t, a)) + h^k(t, a) u_\Delta^k(t, a) \right) \phi(t, a) = 0, \quad (5.9)$$

pour toutes fonctions tests  $\phi$  dans l'espace de fonctions  $D([0, L] \times [0, T])$  avec  $h^k(t, a)$  égal à  $m^k(t, a) + \beta^k(t, a)$ , pour  $k$  égal à  $e, l$ , et  $h^f(t, a)$  donnée par  $m^f(t, a)$ .

Etape 1 : Soit  $\pi u_\Delta^k$  l'interpolée de degré un de la fonction  $u_\Delta^k$ . Elle est définie sur le domaine  $[0, T] \times [0, L]$  par

$$\begin{aligned} \Pi u_\Delta^k(t, a) &= u_i^{k,n} + (u_{i+1}^{k,n} - u_i^{k,n}) \frac{a - a_i}{\Delta a} + (u_i^{k,n+1} - u_i^{k,n}) \frac{t - t^n}{\Delta t} \\ &\quad (u_{i+1}^{k,n+1} - u_i^{k,n+1} - u_{i+1}^{k,n} + u_i^{k,n}) \frac{(a - a_i)(t - t^n)}{\Delta t \Delta a}. \end{aligned}$$

Cette fonction est bornée et continuellement différentiable. D'après son expression et les lemmes (5) et (6) la variation totale est elle aussi bornée

$$\begin{aligned} TV(\Pi u_\Delta^k) &= \|\partial_t \Pi u_\Delta^k\|_{L^1} + \|\partial_a \Pi u_\Delta^k\|_{L^1} \\ &= \frac{1}{\Delta a \Delta t} \sum_{n=1}^{N_t+1} \sum_{i=1}^{N_a} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_i+\frac{1}{2}}^{x_i-\frac{1}{2}} |\partial_t \Pi u_\Delta^k(t, a)| da dt \\ &\quad + \frac{1}{\Delta a \Delta t} \sum_{n=1}^{N_t+1} \sum_{i=1}^{N_a} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_i+\frac{1}{2}}^{x_i-\frac{1}{2}} |\partial_a \Pi u_\Delta^k(t, a)| da dt. \end{aligned}$$

A partir du théorème de compacité d'Helly on en déduit qu'il existe une sous suite de  $\Pi u_\Delta^k$  qui converge dans  $L^1([0, L] \times [0, T])$  vers  $u^k$ . De plus, cette solution est telle que  $u^k$  est dans l'espace  $BV([0, L] \times [0, T])$  et  $u^k$  est une fonction bornée en temps et en âge.

Etape 2 : On montre à présent que la limite obtenue est solution faible. Soit la fonction  $\phi$  dans l'espace des fonctions  $C^1([0, T] \times [0, L])$  à support compact. Elle est approchée sur le volume de contrôle  $[t^n, t^{n+1}] \times C_i$  par

$$\phi_i^n \sim \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}} \frac{\phi(t, a)}{\Delta a \Delta t} da dt,$$

pour tous  $i$  allant de 1 à  $N_a$  et à chaque instant  $n$ . On multiplie les équations du schéma VF par  $\Delta a \phi_i^n$  puis on somme sur toutes les mailles  $i$  et tous les instants  $n$ . Pour les équations du stade de développement  $k$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_a} \Delta a (u_i^{k,n+1} - u_i^{k,n}) \phi_i^n + \sum_{n=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_a} \Delta a \frac{\Delta t}{\Delta a} (v_i^{k,n} u_i^{k,n} - v_{i-1}^{k,n} u_{i-1}^{k,n}) \phi_i^n = \\ - \sum_{n=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_a} \Delta a \Delta t h_i^k u_i^{k,n+1} \phi_i^n. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Le premier terme de cette somme est égale à

$$\sum_{n=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_a} \Delta a (u_i^{k,n+1} - u_i^{k,n}) \phi_i^n = -\Delta a \sum_{n=1}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_a} u_i^{k,n} (\phi_i^n - \phi_i^{n-1}) - \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} u_i^{k,0} \phi_i^0,$$

c'est à dire en utilisant les définitions des approximations

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_a} \Delta a (u_i^{k,n+1} - u_i^{k,n}) \phi_i^n = - \int_{\Delta t}^T \int_0^L u_\Delta^k(t, a) \frac{\phi(t, a) - \phi(a, t - \Delta t)}{\Delta t} da dt \\ - \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} u_i^{k,0} \phi_i^0 = - \int_0^L u_0^k(a) \phi(0, a) da. \end{aligned}$$

Le deuxième terme de cette même somme se décompose en

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_a} \Delta t (v_i^{k,n} u_i^{k,n} - v_{i-1}^{k,n} u_{i-1}^{k,n}) \phi_i^n = -\Delta t \sum_{n=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_a-1} v_i^{k,n} u_i^{k,n} (\phi_{i+1}^n - \phi_i^n) \\ + \Delta t \sum_{n=0}^{N_t-1} v_{N_a}^{k,n} u_{N_a}^{k,n} \phi_{N_a}^n - \Delta t \sum_{n=0}^{N_t-1} v_0^{k,n} u_0^{k,n} \phi_1^n, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_a} \Delta t (v_i^{k,n} u_i^{k,n} - v_{i-1}^{k,n} u_{i-1}^{k,n}) \phi_i^n &= - \int_0^T \int_{\frac{\Delta a}{2}}^{\frac{3\Delta a}{2}} \frac{v^k(t, a) u^k(t, a) \phi(t, a)}{\Delta a} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^L v^k(t, a) u_{\Delta}^k(t, a) \frac{\phi(t, a + \Delta a) - \phi(t, a)}{\Delta a} da dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{L-\frac{\Delta a}{2}}^L \frac{v^k(t, a) u_{\Delta}^k(t, a) \phi(t, a)}{\Delta a} da dt. \end{aligned}$$

Enfin le dernier terme de la somme est lui égale à

$$- \sum_{n=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_a} \Delta a \Delta t h_i^{k,n+1} u_i^{k,n+1} \phi_i^n = - \int_0^T \int_0^L \beta^k(t + \Delta t, a) u_{\Delta}^k(t + \Delta t, a) \phi(t, a) da dt.$$

On fait tendre les pas de discrétisation vers la valeur nulle, l'équation (5.10) est égale à

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \int_0^L u_{\Delta}^k(t, a) \left( \partial_t \phi(t, a) + v^k(t, a) \partial_a \phi(t, a) - h^k(t, a) \phi(t, a) \right) da dt \\ &\quad - \int_0^L u_0^k(a) \phi(0, a) da - \int_0^T v^k(t, 0) u^k(t, 0) \phi(t, 0) dt = 0. \end{aligned}$$

En appliquant une intégration par partie sur chaque terme on obtient la relation (5.9),  $u_{\Delta}^e$ ,  $u_{\Delta}^l$  et  $u_{\Delta}^f$  sont alors solutions faibles du problème (3.3)-(3.4)-(3.5).

## 5.4 Continuité des schémas par rapport aux paramètres.

On démontre ici d'autres propriétés sur le schéma (5.1) qui seront utiles dans l'étude numérique des problèmes d'estimation des paramètres du modèle Eudémis. Tout d'abord, on simplifie les fonctions du modèle comme suit

$$v^k(t, a) = 1, \quad \beta^k(t, a) = \beta^k(a), \quad m^k(t, a) = m^k(a)$$

pour  $k$  égal à  $e, l, f$ . Dans ce cas, la CFL est satisfaite si le quotient  $\frac{\Delta t}{\Delta a}$  est dans l'intervalle  $[0, 1]$ . On note  $\tilde{u}^{k,n}$  et  $u^{k,n}$  les vecteurs obtenus à l'itération  $n$  par le schéma numérique VF avec respectivement comme fonction  $\tilde{\beta}_{\Delta}^k$  et  $\beta_{\Delta}^k$  pour  $k$  égal à  $e, l$ . On définit l'ensemble

$$K_{\Delta} = \{ \beta(a) = \beta_i, \quad i \in C_i, \quad 0 \leq \beta_i \leq \bar{\beta}, \quad \forall i = 1, N_a \}.$$

**Lemme 7** *Il existe une constante positive  $C$  indépendante de  $N_a$  et  $N_t$  tel que*

$$\|u^{e,n+1} - \tilde{u}^{e,n+1}\|_{\infty} \leq C \|\beta_{\Delta}^e - \tilde{\beta}_{\Delta}^e\|_{\infty},$$

où  $\beta_{\Delta}^e$  et  $\tilde{\beta}_{\Delta}^e$  sont dans  $K_{\Delta}$  et la CFL est satisfaite. La constante  $C$  dépend précisément des constantes  $\beta, L, T$  et de la condition initiale  $u_0^e$ .

**Preuve :** Soit  $\epsilon = \|\beta_{\Delta}^e - \tilde{\beta}_{\Delta}^e\|_{\infty}$  et soit  $N_t$  arbitrairement fixé. Il suffit de montrer qu'il existe une constante  $C$  tel que

$$\max_{i,n} |u_i^{e,n+1} - \tilde{u}_i^{e,n+1}| \leq C \epsilon.$$

Soit  $\xi_i^{e,n} = \tilde{u}_i^{e,n} - u_i^{e,n}$ , pour tous les  $n$  positifs, on a

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}\right) + \xi_{i-1}^n \frac{\Delta t}{\Delta a} - \Delta t (\tilde{\beta}_i \xi_i^{n+1} + u_i^{n+1} (\tilde{\beta}_i - \beta_i)).$$

En admettant que la CFL est vérifiée, cette inégalité devient,

$$\xi^{n+1} \leq \xi^n + \Delta t \bar{\beta} \xi^{n+1} + \Delta t M \|\tilde{\beta} - \beta\|_\infty,$$

où  $\xi^n = \max_i |\xi_i^n|$ . Par récurrence on a

$$\xi^{n+1} \leq \xi^0 e^{T\bar{\beta}} + TM\epsilon e^{T\bar{\beta}}$$

Par définition,  $\xi^0$  est nulle, on pose  $C$  égal à  $MT e^{T\bar{\beta}}$ . □

Soient  $M^e$  et  $M^l$  les constantes positives tel que

$$\max_{i,n} |u_i^{e,n}| \leq M^e \quad \text{et} \quad \max_{i,n} |u_i^{l,n}| \leq M^l$$

**Lemme 8** *Il existe des constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  indépendantes de  $N_a$  et  $N_t$  tel que*

$$\|u^{l,n+1} - \tilde{u}^{l,n+1}\|_\infty \leq C_1 \|\beta_\Delta^l - \tilde{\beta}_\Delta^l\|_\infty + C_2 \|\beta_\Delta^e - \tilde{\beta}_\Delta^e\|_\infty$$

où  $(\beta_\Delta^e, \beta_\Delta^l)$  et  $(\tilde{\beta}_\Delta^e, \tilde{\beta}_\Delta^l)$  sont dans  $K_\Delta$  et la CFL est satisfaite. La constante  $C$  dépend précisément des constantes  $\beta, L, T$  et de la condition initiale  $\phi$ .

**Preuve :** Soient  $\epsilon^l = \|\beta_\Delta^l - \tilde{\beta}_\Delta^l\|_\infty$  et  $\epsilon^e = \|\beta_\Delta^e - \tilde{\beta}_\Delta^e\|_\infty$ . Il suffit de montrer qu'il existe une constante  $C$  tel que

$$\max_{i,n} |u_i^{l,n+1} - \tilde{u}_i^{l,n+1}| \leq C_1 \epsilon^l + C_2 \epsilon^e.$$

On fait la preuve pour  $i$  égal à 1 seulement car dans les autres cas ( $i \neq 1$ ) la preuve est identique à celle faite dans le lemme (7). Soit  $\xi_1^{l,n} = \tilde{u}_1^{l,n} - u_1^{l,n}$ , pour  $n$  supérieur ou égal à 1 on a

$$\xi_1^{l,n+1} = \xi_1^{l,n} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}\right) + \Delta t \Delta a \sum_i^{N_a} (\beta_i^e u_i^{e,n} - \tilde{\beta}_i^e \tilde{u}_i^{e,n}) - \Delta t (\tilde{\beta}_1^l \xi_1^{l,n+1} + u_1^{l,n+1} (\tilde{\beta}_1^l - \beta_1^l)).$$

Soit maintenant

$$\xi^{e,n} = \max_i |u_i^{e,n} - \tilde{u}_i^{e,n}|,$$

en admettant que la CFL est vérifiée, on a

$$\begin{aligned} |\xi_1^{l,n+1}| &\leq |\xi_1^{l,n}| \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}\right) + \Delta t \bar{\beta}^l |\xi_1^{l,n+1}| + \Delta t M^l \|\tilde{\beta}^l - \beta^l\|_\infty \\ &\quad + \Delta t \Delta a \sum_i^{N_a} \bar{\beta}^e \xi^{e,n} + \Delta t \Delta a \sum_i^{N_a} M^e \|\beta^e - \tilde{\beta}^e\|_\infty. \end{aligned}$$

D'après le lemme (7), on déduit

$$\begin{aligned} |\xi_1^{l,n+1}| (1 - \Delta t \bar{\beta}^l) &\leq |\xi_1^{l,n}| + \Delta t M^l \|\tilde{\beta}^l - \beta^l\|_\infty \\ &\quad + (\Delta t L \bar{\beta}^e C + \Delta t L M^e) \|\beta^e - \tilde{\beta}^e\|_\infty. \end{aligned}$$

Par récurrence on a

$$|\xi_1^{l,n+1}| \leq \frac{|\xi_1^{l,0}|}{(1 - \Delta t \bar{\beta}^l)^{N_t}} + \frac{TM^l}{(1 - \Delta t \bar{\beta}^l)^{N_t}} \|\tilde{\beta}^l - \beta^l\|_\infty \\ + \frac{TL\bar{\beta}^e C + TLM^e}{(1 - \Delta t \bar{\beta}^l)^{N_t}} \|\beta^e - \tilde{\beta}^e\|_\infty.$$

En approchant  $(1 - \Delta t \bar{\beta}^l)^{-N_t}$  par  $e^{T\bar{\beta}^l}$ , on a

$$|\xi_1^{l,n+1}| \leq |\xi_1^{l,0}| e^{T\bar{\beta}^l} + TM^l e^{T\bar{\beta}^l} \|\tilde{\beta}^l - \beta^l\|_\infty \\ + (TL\bar{\beta}^e C + TLM^e) e^{T\bar{\beta}^l} \|\beta^e - \tilde{\beta}^e\|_\infty.$$

Par définition  $\xi^{l,0}$  est nul, on pose  $C_1 = TM^l e^{T\bar{\beta}^l}$  et  $C_2 = (TL\bar{\beta}^e C + TLM^e) e^{T\bar{\beta}^l}$  alors

$$|\xi_1^{l,n+1}| \leq C_1 \|\tilde{\beta}^l - \beta^l\|_\infty + C_2 \|\beta^e - \tilde{\beta}^e\|_\infty.$$

**Lemme 9** *Il existe des constantes positives  $D$ ,  $D_1$  et  $D_2$  indépendantes de  $N_a$  et  $N_t$  tel que*

$$\|u^{e,n+1} - \tilde{u}^{e,n+1}\|_\infty \leq D \|m_\Delta^e - \tilde{m}_\Delta^e\|_\infty \\ \|u^{l,n+1} - \tilde{u}^{l,n+1}\|_\infty \leq D_1 \|m_\Delta^l - \tilde{m}_\Delta^l\|_\infty + D_2 \|m_\Delta^e - \tilde{m}_\Delta^e\|_\infty$$

où  $(m_\Delta^e, m_\Delta^l)$  et  $(\tilde{m}_\Delta^e, \tilde{m}_\Delta^l)$  sont dans  $K_\Delta$  et la CFL est satisfaite. La constante  $C$  dépend précisément des constantes  $\bar{\beta}$ ,  $L$ ,  $T$  et de la condition initiale  $u_0^l$ .

**Preuve :** La démonstration est équivalente à celle des lemmes (7) et (8).

## Deuxième partie

# Estimation des paramètres du modèle *Lobesia botrana*.



Dans cette partie, on estime les paramètres du modèle *Lobesia botrana* annuel à partir de données expérimentales. Les expériences réalisées en conditions contrôlées permettent de mesurer le temps de développement de l'insecte dans les stades oeuf, larve et papillon, mais aussi le taux de mortalité, le taux de fécondité et le sex ratio. Le temps de développement de la population est calculé à partir de la distribution dans le temps des individus, c'est à dire à partir de la dynamique temporelle de cette population. On dispose alors de données temporelles sur la dynamique d'émergence, ou la distribution dans le temps de la première apparition du papillon, de la dynamique d'éclosion, ou la répartition au cours du temps de l'éclosion des L1 et la dynamique de ponte qui correspond à la naissance des oeufs en fonction du temps. Des distributions en âge sont mesurées à un instant précis sur les chenilles. Ces mesures informent sur le temps de développement du stade larve et chrysalide et donnent la répartition des larves en fonctions des stades larvaires L1, à L5. A partir de toutes ces données expérimentales, on tente de définir les paramètres du modèle défini en (3.3)-(3.4)-(3.5). Ces mesures ont été obtenues dans des conditions climatiques et environnementales constantes, les paramètres du modèle *Lobesia botrana* annuel se simplifient de la manière suivante

$$\begin{cases} E(t) = E_0, \\ v^k(E(t), a) = 1, & a \in [0, L^k], \quad k = e, l, f, m, \\ m^k(E(t), a) = m^k(a), & a \in [0, L^k], \quad k = e, f, m, \\ m^l(P^l(t), E(t), a) = m^l(a), & a \in [0, L^l], \\ \beta^k(E(t), a) = \beta^k(a), & a \in [0, L^k], \quad k = e, l, \\ \beta^f(P^f(t), P^m, E(t), a) = \beta^f(a), & a \in [0, L^f], \end{cases}$$

où  $L^k$  est l'âge maximal de vie dans le stade de développement  $k$ . On suppose que ces fonctions vérifient les hypothèses (H1)-(H6) données dans le chapitre 4 pour  $E(t)$  constant et égal à  $E_0$ . On cherche simultanément, dans les chapitres suivants, le taux d'éclosion, le taux d'émergence, le taux de ponte et les taux de mortalité.



FIG. 5.1: Élevage d'*Eudémis* de la vigne de l'UMR INRA Santé Végétale basé à Villenave d'Ornon (photo INRA).



## Chapitre 6

# Estimation du taux d'éclosion.

On souhaite déterminer dans ce chapitre le taux d'éclosion,  $\beta^e$ , en fonction de l'âge des individus. On utilise alors les données expérimentales liées à la dynamique d'éclosion et obtenues en enceintes climatiques. Cette expérience débute avec une population d'oeufs nés le même jour et consiste à mesurer le temps qui leur est nécessaire pour devenir des larves. On en déduit la dynamique d'éclosion des jeunes larves en fonction du temps et la durée moyenne de développement d'un oeuf sous des conditions de 60% d'humidité et une température constante de 20°C. Le développement de cette cohorte peut être modélisé par l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u^e}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^e}{\partial a}(t, a) = -\beta^e(a)u^e(t, a), & a \in [0, L], \quad t \in [0, T] \\ u^e(0, a) = u_0^e(a), & a \in [0, L] \\ u^e(t, 0) = 0, & t \in [0, T] \end{cases} \quad (6.1)$$

où  $u^e$  est la densité d'individus oeufs,  $L$  est l'âge maximal de vie d'un oeuf et  $T$  le temps final de l'expérience. On néglige le taux de mortalité dans cette équation car la quantité d'individus décédant dans cette expérience est très faible. La dynamique d'éclosion au cours du temps est modélisée dans l'équation suivante

$$q_{exp}(t) = \int_0^L \beta^e(a)u^e(t, a)da, \quad t \in [0, T], \quad (6.2)$$

où  $q_{exp}$  est la donnée expérimentale. La condition de renouvellement de la population oeuf est nulle à chaque instant par ce qu'il n'y pas d'introduction de nouveaux oeufs au cours de l'expérience. On suppose que la donnée expérimentale vérifie la condition suivante

**H 7** La donnée expérimentale  $q_{exp}$  est une fonction bornée, non négative par rapport à la variable temps.

### 6.1 Formulation du problème d'estimation.

On cherche le taux de transition  $\beta^e$  satisfaisant l'équation (6.2). La densité oeuf  $u^e$  est déterminée dans le système (6.1) par le taux d'éclosion  $\beta^e$  et la donnée initiale  $u_0^e$ . On cherche alors un couple de fonctions  $(\beta^e, u^e)$  vérifiant l'équation (6.2). Pour arriver à cette fin, on formule un

problème de moindres carrés qui s'écrit

$$[P_1] = \begin{cases} \text{Min}_{\beta^e \in K} \int_0^T \left[ \int_0^L \beta^e(a) u^e(t, a) da - q_{exp}(t) \right]^2 dt, \\ \text{où } u^e \text{ est solution de} \\ \begin{cases} \frac{\partial u^e}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^e}{\partial a}(t, a) = -\beta^e(a) u^e(t, a), \\ u^e(t, 0) = 0, \quad t > 0, \\ u^e(0, a) = u_0^e(a), \quad a \in [0, L]. \end{cases} \end{cases}$$

Le domaine  $K$  est l'ensemble des solutions admissibles et est donné par

$$K = \{ \beta(a) \in L^\infty([0, L]); 0 < \underline{\beta} \leq \beta \leq \hat{\beta} \}.$$

On note la fonction coût du problème d'estimation  $\mathcal{J}(\beta^e)$  et  $\Omega$  le domaine  $[0, L] \times [0, T]$ .

**Théorème 3** *Le problème  $[P]_1$  admet au moins un optimum.*

**Preuve :** Soit  $d$  la borne inférieure de la fonction coût telle que  $0 \leq d < +\infty$ . Soit  $\{\beta_n^e\}$ , où  $n$  est un entier non nul, une suite minimisante telle que

$$d < \mathcal{J}(\beta_n^e) \leq d + \frac{1}{n}, \quad (6.3)$$

où la valeur de la fonction coût pour cette solution est donnée par

$$\mathcal{J}(\beta_n^e) = \int_0^T \left[ \int_0^L \beta_n^e(a) u^e(t, a) da - q_{exp}(t) \right]^2 dt.$$

La suite  $\{\beta_n^e\}$  appartient à l'espace  $K$ , par conséquent il existe une sous suite  $\{\beta_{n_k}^e\}_k$  de  $\{\beta_n^e\}_n$  qui converge faiblement vers  $\beta^*$  dans l'espace  $L^2([0, L])$ . La densité  $u^e$  est dépendante de la suite  $\{\beta_{n_k}^e\}_k$ , on la note  $\{u_{n_k}^e\}_k$  et est donnée par

$$u_{n_k}^e(t, a) = \begin{cases} u_0^e(a-t) e^{-\int_{a-t}^a \beta_{n_k}^e(s) ds}, & a > t, \\ 0 & a \leq t. \end{cases}$$

Cette suite est bornée dans l'espace  $L^2(\Omega)$ . La suite de fonctions  $\beta_{n_k}^e$  converge faiblement vers  $\beta^*$  dans l'espace  $L^2([0, L])$ , par conséquent,

$$\int_{a-t}^a \beta_{n_k}^e(s) ds = \int_0^L \beta_{n_k}^e(s) \chi_{[a, a-t]}(s) ds \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^L \beta_*^e(s) \chi_{[a, a-t]}(s) ds = \int_{a-t}^a \beta_*^e(s) ds.$$

La limite de la suite  $\{u_{n_k}^e\}_k$  est donc égale à

$$u^*(t, a) = \begin{cases} u_0^e(a-t) e^{-\int_{a-t}^a \beta^*(s) ds}, & a > t, \\ 0 & a \leq t. \end{cases}$$

Finalement, la fonction coût au point  $\beta_{n_k}^e$  converge vers

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\beta_{n_k}^e) &= \int_0^T \left[ \int_0^L \beta_{n_k}^e(a) \hat{u}_{n_k}^e(t, a) da - q_{exp}(t) \right]^2 dt \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \left[ \int_0^L \beta^*(a) u^*(t, a) da - q_{exp}(t) \right]^2 dt = \mathcal{J}(\beta^*), \end{aligned}$$

et  $\mathcal{J}(\beta^*) = d$  avec (6.29). □

## 6.2 Résolution du problème d'estimation.

Le problème  $[P_1]$  consiste à minimiser une fonctionnelle quadratique sous certaines contraintes, il est donc naturel de chercher à imposer ces contraintes au moyen d'un multiplicateur de Lagrange, transformant le problème en un problème de point-selle. Soient  $p$  la variable duale et  $S$  le vecteur  $(u^e, \beta^e, p)$  défini dans  $L^2(\Omega) \times K \times L^2(\Omega)$ . Le Lagrangien s'écrit au point  $S$

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{J}(\beta^e) + \int_0^T \int_0^L [\partial_t u^e + \partial_a u^e + \beta^e(a) u^e] p(t, a) da dt.$$

D'après les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, le vecteur  $S^*$ , qui est donné par  $(u^*, \beta^*, p^*)$ , est un optimum de  $\mathcal{L}$  si

$$\frac{\partial \mathcal{L}(S^*)}{\partial p} = \frac{\partial \mathcal{L}(S^*)}{\partial u^e} = \frac{\partial \mathcal{L}(S^*)}{\partial \beta^e} = 0.$$

Le calcul de la dérivée première du Lagrangien par rapport à la variable duale  $p$  donne la première équation du problème d'évolution (6.1). En résolvant cette équation par la méthode des caractéristiques, on obtient une solution explicite de  $u^*$  pour tous  $t$  et  $a$  en fonction de  $\beta^*$ . Le problème adjoint est obtenu en dérivant le Lagrangien au point  $S^*$  par rapport à  $u^e$ . Au point  $S$  la dérivée s'écrit

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(S)}{\partial u^e}, v \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u^e}, v \right\rangle_{L^2(\Omega)} - \left\langle (\partial_t p + \partial_a p - \beta^e p), v \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \int_0^L (pv)(T, a) da + \int_0^T (pv)(t, L) dt, \end{aligned}$$

où le calcul de la dérivée de la fonction coût par rapport à la variable d'état  $u^e$  est

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u^e}, v \right\rangle_{L^2(\Omega)} = 2 \int_0^T \left( \int_0^L \beta^e u^e da \right) \left( \int_0^L \beta^e v da \right) dt - 2 \int_0^T q_{exp}(t) \int_0^L \beta^e v da dt,$$

quelque soit  $v$  dans l'espace  $L^2(\Omega)$  tel que  $v(t, 0) = 0$  et  $v(0, a) = 0$ . Au point  $S^*$ , on déduit le problème adjoint suivant

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} p^*(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} p^*(t, a) + \beta^*(a) p^*(a, t) = 2\beta^*(a) \left( q_{exp}(t) - \int_0^L \beta^*(a) u^*(t, a) da \right), \\ p^*(T, a) = p^*(t, L) = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

C'est un problème d'évolution qui admet une solution exacte, on la trouve avec la méthode des caractéristiques

$$p^*(t, a) = \begin{cases} -2 \int_t^T e^{-\int_t^s \beta^*(\tau) d\tau} \beta^*(a) f^*(s) ds, & a > t, \\ -2 \int_a^L e^{-\int_t^s \beta^*(\tau) d\tau} \beta^*(s) f^*(t) ds, & a \leq t, \end{cases} \quad (6.5)$$

pour tous  $t \in [0, T]$  et  $f^*(s) = \int_0^L \beta^*(a) u^*(s, a) da - q_{exp}(s)$ . On a les formules explicites des variables  $u^*$  et  $p^*$  de l'optimum  $S^*$  qui dépendent du contrôle  $\beta^*$ . Déterminons, à présent, une relation pour  $\beta^*$  en calculant la dérivée du Lagrangien par rapport à  $\beta^e$ . Pour toutes fonctions  $h$  dans l'espace  $L^2([0, L])$  telles que  $h(0) = h(L) = 0$ , la dérivée est

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(S)}{\partial \beta^e}, h \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}(\beta^e)}{\partial \beta^e}, h \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle u^e p, h \right\rangle_{L^2(\Omega)},$$

où

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}(\beta^e)}{\partial \beta^e}, h \right\rangle_{L^2(\Omega)} = 2 \left\langle u^e \left( \int_0^L \beta^e u^e da - q_{exp}(t) \right), h \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Le vecteur  $S^*$  est un optimum du problème  $[P_1]$  si et seulement si le gradient de la fonction Lagrangienne est nulle à ce point. L'optimum  $S^*$  satisfait alors l'équation suivante

$$2 \int_0^L \beta^*(a) u^*(t, a) da + p^*(t, a) = 2q_{exp}(t), \quad (6.6)$$

où  $p^*$  est donné par l'équation (6.5) et la variable  $u^*$  est égale à

$$u^*(t, a) = u_0^e(a-t) e^{-\int_{a-t}^a \beta^*(s) ds}, \quad a > t.$$

L'équation (6.6) est non linéaire par rapport au contrôle optimal  $\beta^*$ , il est donc difficile de calculer analytiquement le taux d'éclosion pour cette observation.

### 6.3 Le problème discret.

On cherche la solution du problème  $[P_1]$  à l'aide de méthodes numériques. Pour cela, on discrétise l'intervalle de la variable temporelle  $[0, T]$  en  $N_t + 1$  points tels que

$$t^n = n\Delta t \quad n = 0, N_t,$$

où  $\Delta t$  est le pas de discrétisation en temps. Le domaine en âge  $[0, L]$  est décomposé en  $N_a + 1$  intervalles tel que

$$[0, L] = \bigcup_{i=0}^{N_a} U_i[a_{i-\frac{1}{2}}, a_{i+\frac{1}{2}}[, \quad i = 0, N_a.$$

On note  $C_i$  le volume de contrôle à la maille  $i$  qui est donné par  $[a_{i-\frac{1}{2}}, a_{i+\frac{1}{2}}[$ . Les mailles  $a_{i-\frac{1}{2}}$  sont calculées selon la formule

$$a_{i-\frac{1}{2}} = \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta a, \quad i = 1, N_a - 1$$

où  $\Delta a$  est le pas de discrétisation en âge. Les volumes de contrôle  $C_0$  et  $C_{N_a}$  sont respectivement égaux aux intervalles  $[0, \frac{\Delta a}{2}[$  et  $[L - \frac{\Delta a}{2}, L[$ .

On choisit d'approcher l'équation hyperbolique du système (6.1) par un schéma volume finis (VF)

$$\begin{aligned} u_i^{e,n+1} &= \frac{u_i^{e,n} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}\right) + u_{i-1}^{e,n} \frac{\Delta t}{\Delta a}}{1 + \Delta t \beta_i^e}, \quad i = 1, N_a, \quad n = 0, N_t - 1, \\ u_i^{e,0} &= u_{0,i}^e, \quad i = 1, N_a, \\ u_0^{e,n} &= 0, \quad n = 0, N_t, \end{aligned} \quad (6.7)$$

où  $u_i^{e,n}$  représente l'approximation de la fonction  $u^e$  sur le domaine  $[t^n, t^{n+1}[ \times C_i$  et  $u_{0,i}^e$  est la valeur moyenne sur le volume de contrôle  $C_i$  de la donnée initiale  $u_0^e$ . Les propriétés de ce schéma ont été étudiées dans le chapitre 5 de cette thèse. On a montré que la solution de ce schéma converge vers la solution faible du problème (6.1). A partir de ce maillage, on approche la fonction coût du problème d'optimisation  $[P_1]$  de la façon suivante

$$J_\Delta(\beta_\Delta) = \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^e u_i^{e,n} - q_{exp}^n \right]^2$$

où  $u_i^{e,n}$  est calculé par le schéma VF, pour tous  $i$  allant de 1 à  $N_a$  et pour tous  $n$  allant de 0 à  $N_t$ , et  $q_{exp}^n$  est l'approximation de la fonction  $q_{exp}$  sur le domaine  $t \in [t^n, t^{n+1}]$ , pour tous  $n$  allant de 0 à  $N_t$ . On cherche la fonction  $\beta_\Delta$  dans l'espace des solutions

$$K_\Delta = \{\beta(a) = \beta_i, \quad a \in C_i, \quad 0 \leq \beta_i \leq \bar{\beta}, \quad i = 1, N_a\}$$

qui est l'approximation de l'espace des fonctions  $K$ . Le problème discret de  $[P_1]$  est

$$[P_1]_\Delta = \begin{cases} J_\Delta(\beta_\Delta) = \text{Min}_{g_\Delta \in K_\Delta} J_\Delta(g_\Delta) \\ \text{où } u_i^{e,n} \text{ est calculé pour } i = 0, N_a \text{ et } n = 0, N_t \text{ par} \\ u_i^{e,n+1} = \frac{u_i^{e,n}(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + u_{i-1}^{e,n} \frac{\Delta t}{\Delta a}}{1 + \Delta t \beta_i^e}, \quad i = 1, N_a, \quad n = 0, N_t - 1, \\ u_i^{e,0} = u_{0,i}^e, \quad i = 1, N_a, \\ u_0^{e,n} = 0, \quad n = 0, N_t. \end{cases}$$

On étudie d'abord l'existence de solution pour ce problème discret.

**Théorème 4** *Le problème  $[P_1]_\Delta$  admet au moins une solution.*

**Preuve :** Soit  $d$  la borne inférieure de la fonction coût  $J_\Delta(\beta_\Delta)$ . Soit  $\{\beta_\Delta^k\}$ , où  $k$  est un entier non nul, une suite minimisante appartenant à l'espace  $K_\Delta$  telle que

$$d < J_\Delta(\beta_\Delta^k) \leq d + \frac{1}{k}.$$

La valeur de la fonction coût au point  $\beta_\Delta^k$  est donnée par

$$J_\Delta(\beta_\Delta^k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^k u_i^{e,n}(\beta_\Delta^k) - q_{exp}^n \right]^2,$$

où  $u_i^{e,n}(\beta_\Delta^k)$  est la solution du schéma VF (6.7) pour  $\beta_\Delta$  égal à  $\beta_\Delta^k$  pour tous  $i$  allant de 1 à  $N_a$  et pour tous  $n$  allant de 0 à  $N_t$ .

La suite  $\{\beta_\Delta^k\}_k$  est bornée, d'après le théorème de B.W, on peut en extraire une sous suite, notée  $\{\beta_\Delta^{k_n}\}_{k_n}$  qui converge vers  $\beta_\Delta^*$ . Cette limite est dans l'espace  $K_\Delta$ . Le lemme (7) du chapitre 5 nous assure que

$$|u_i^{e,n}(\beta_\Delta^k) - u_i^{e,n}(\beta_\Delta^*)| \leq C |\beta_i^k - \beta_i^*| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned} J_\Delta(\beta_\Delta^k) &= \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^k u_i^{e,n}(\beta_\Delta^k) - q_{exp}^n \right]^2 \\ &= \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} u_i^{e,n}(\beta_\Delta^k) (\beta_i^k - \beta_i^*) + \beta_i^* (u_i^{e,n}(\beta_\Delta^k) - u_i^{e,n}(\beta_\Delta^*)) \right]^2 \\ &\quad + \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^* u_i^{e,n}(\beta_\Delta^*) - q_{exp}^n \right]^2 \\ &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^* u_i^{e,n}(\beta_\Delta^*) - q_{exp}^n \right]^2 = J_\Delta(\beta_\Delta^*) = d. \quad \square \end{aligned}$$

Dans le prochain paragraphe, on vérifie que la solution du problème discret  $[P_1]_\Delta$  converge vers la solution du problème continu  $[P_1]$ . Mais aussi que la valeur prise par la fonction coût discrète à l'optimum converge vers celle de la fonction toujours à l'optimum mais du problème continu. On se donne, pour l'analyse numérique suivante, la borne uniforme de la fonction approchée de  $q_{exp}$  qui est une constante positive notée  $Q$ .

### 6.3.1 Résolution du problème discret.

On résout le problème discret  $[P_1]_\Delta$  avec une méthode de descente de Quasi-Newton. La construction de ce schéma nécessite le calcul du gradient de la fonction coût. On le calcule à partir de la fonction Lagrangienne. Soient  $\lambda_\Delta$  la variable duale et  $S$  le vecteur égal à  $(\beta_\Delta, u_\Delta, \lambda_\Delta)$  où

$$u_\Delta = \{u_i^{e,n}\}, \quad i = 0, N_a, \quad n = 0, N_t, \quad \text{et} \quad \lambda_\Delta = \{\lambda_i^n\}, \quad i = 1, N_a, \quad n = 0, N_t.$$

Le Lagrangien s'écrit au point  $S$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Delta(S) = \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^e u_i^{e,n} - q_{ext}^n \right]^2 \\ + \sum_{n=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_a} \lambda_i^n \left( u_i^{e,n+1} - \frac{u_i^{e,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + u_{i-1}^{e,n} \frac{\Delta t}{\Delta a}}{1 + \Delta t \beta_i^e} \right). \end{aligned}$$

On cherche la solution du problème  $[P_1]_\Delta$  en calculant le gradient du Lagrangien. En effet, on va voir que la dérivée du Lagrangien par rapport à la fonction  $\beta_\Delta$  est équivalente au gradient de la fonction coût.

#### Calcul du gradient du Lagrangien.

La dérivée de la fonction discrète  $\mathcal{L}_\Delta$  par rapport à la densité  $u_{i_0}^{e,n_0}$  et à l'optimum nous permet d'avoir une relation sur la variable duale  $\lambda_\Delta$  qui est donnée par

$$\begin{aligned} \lambda_{i_0}^{n_0-1} = \frac{\Delta t}{\Delta a} \frac{\lambda_{i_0+1}^{n_0}}{1 + \Delta t \beta_{i_0+1}^e} + \lambda_{i_0}^{n_0} \frac{(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a})}{1 + \Delta t \beta_{i_0}^e} \\ - 2\Delta t \Delta a \beta_{i_0}^e (\Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^e u_i^{e,n_0} - q_{exp}^{n_0}), \end{aligned} \quad (6.8)$$

pour  $i_0$  allant de 1 à  $N_a$  et pour  $n_0$  allant de  $N_t$  à 1. On pose  $f$  le vecteur de taille  $N_a$  égal au vecteur de la variable duale définie à l'instant  $N_t$ . La fonction  $f$  est supposée bornée par la constante  $F$ . On montre dans le lemme suivant que les variables duales  $\lambda_i^n$  pour  $i$  allant de 1 à  $N_a$  et pour  $n_0$  allant de  $N_t - 1$  à 1 sont uniformément bornées.

**Lemme 10** *Sous la condition CFL du schéma (6.7), il existe une constante positive  $N > 0$  telle que*

$$|\lambda_i^n| \leq N, \quad i = 1, N_a, \quad n = 0, N_t.$$

**Preuve :** On montre d'abord l'inégalité à l'instant  $N_t - 1$ . En supposant que la condition CFL ( $\frac{\Delta t}{\Delta a}$  est dans l'intervalle  $[0, 1]$ ) est vérifiée on a

$$\begin{aligned} |\lambda_i^{N_t-1}| \leq \frac{\Delta t}{\Delta a} \frac{|f_{i+1}|}{1 + \Delta t \underline{\beta}} + (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) \frac{|f_i|}{1 + \Delta t \underline{\beta}} \\ + 2\Delta t \Delta a \bar{\beta} \left( \Delta a \sum_{j=1}^{N_a} \beta_j^e u_j^{e,N_t} + q_{exp}^{N_t} \right) \end{aligned}$$

pour  $i$  allant de 1 à  $N_a$ . La constante  $\underline{\beta}$  est la borne positive inférieure de la fonction  $\beta_\Delta^e$ . L'inégalité du dessus se simplifie et on a

$$|\lambda_i^{N_t-1}| \leq \frac{F}{1 + \Delta t \underline{\beta}} + 2(\Delta a)^2 \bar{\beta} (L\bar{\beta}M + Q) \xrightarrow{\Delta a \rightarrow 0} F$$

où  $M$  est la borne supérieure de  $u_i^{e,n}$  pour  $i$  allant de 1 à  $N_a$  et pour  $n$  allant de 1 à  $N_t$ . En posant  $N = F$ , la relation du lemme (10) est vraie pour tous  $i$  allant de 1 à  $N_a$  et à l'instant  $N_t - 1$ . On admet que l'inégalité du lemme est vérifiée jusqu'à l'itération  $n$ , c'est à dire qu'on a

$$|\lambda_i^n| \leq N, \quad i = 1, N_a,$$

on montre que cette inégalité est encore vraie à l'instant  $n - 1$ . En s'appuyant sur les calculs pour l'estimation de la variable duale à l'instant  $N_t - 1$  ci-dessus, on a

$$|\lambda_i^{n-1}| \leq \frac{N}{1 + \Delta t \underline{\beta}} + 2\Delta t \Delta a \bar{\beta} (L\bar{\beta}M + Q) \xrightarrow{\Delta a \rightarrow 0} N,$$

pour  $i$  allant de 1 à  $N_a$ . En posant  $N = F$ , la relation du lemme (10) est vraie à l'instant  $n - 1$ . Par récurrence, on déduit que le lemme est vraie sur toutes les mailles  $i$  et tous les instants  $n$ .  $\square$

Soient les vecteurs  $\lambda^n$  et  $\tilde{\lambda}^n$  calculés à l'itération  $n$  à partir de la relation (6.8) avec respectivement  $(\beta_\Delta, u_\Delta)$  et  $(\tilde{\beta}_\Delta, \tilde{u}_\Delta)$ . On donne le lemme suivant

**Lemme 11** *Sous la condition CFL du schéma (6.7), il existe une constante positive  $\xi$  telle que*

$$\|\lambda^n - \tilde{\lambda}^n\|_\infty \leq \xi \|\beta_\Delta - \tilde{\beta}_\Delta\|_\infty, \quad n = 0, N_t,$$

où  $\beta_\Delta$  et  $\tilde{\beta}_\Delta$  sont dans  $K_\Delta$ .

**Preuve :** Dans un premier temps on montre la relation du lemme 11 à l'itération  $N_t - 1$

$$\begin{aligned} \lambda_i^{N_t-1} - \tilde{\lambda}_i^{N_t-1} &= \frac{\Delta t}{\Delta a} \left[ \frac{\lambda_{i+1}^{N_t}}{1 + \Delta t \beta_{i+1}^e} - \frac{\tilde{\lambda}_{i+1}^{N_t}}{1 + \Delta t \tilde{\beta}_{i+1}^e} \right] \\ &+ \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}\right) \left[ \frac{\lambda_i^{N_t}}{1 + \Delta t \beta_i^e} - \frac{\tilde{\lambda}_i^{N_t}}{1 + \Delta t \tilde{\beta}_i^e} \right] \\ &- 2\Delta t \Delta a \left[ \beta_i^e \left( \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^e u_i^{e,N_t} - q_{exp}^{N_t} \right) - \tilde{\beta}_i^e \left( \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \tilde{\beta}_i^e \tilde{u}_i^{e,N_t} - q_{exp}^{N_t} \right) \right]. \end{aligned}$$

Les deux premiers crochets de cette équation s'annulent car la valeur des variables duales à l'instant  $N_t$  est identique. Le dernier terme de cette équation se décompose de la manière suivante

$$\begin{aligned} \lambda_i^{N_t-1} - \tilde{\lambda}_i^{N_t-1} &= -2\Delta t \Delta a \left[ q_{exp}^{N_t} (\tilde{\beta}_i^e - \beta_i^e) + \Delta a \beta_i^e \sum_{i=1}^{N_a} (\beta_i^e - \tilde{\beta}_i^e) u_i^{e,N_t} \right] \\ &- 2\Delta t \Delta a \left[ \Delta a \beta_i^e \sum_{i=1}^{N_a} \tilde{\beta}_i^e (u_i^{e,N_t} - \tilde{u}_i^{e,N_t}) + \Delta a (\beta_i^e - \tilde{\beta}_i^e) \sum_{i=1}^{N_a} \tilde{\beta}_i^e \tilde{u}_i^{e,N_t} \right]. \end{aligned}$$

On prend la valeur absolue des deux membres de cette équation que l'on majore sur toutes les mailles  $i$ . A partir du lemme (7) démontré dans le chapitre 5 de cette thèse et sous la condition CFL du schéma (6.7), on montre l'inégalité du lemme 11 à l'instant  $N_t - 1$

$$\|\lambda^{N_t-1} - \tilde{\lambda}^{N_t-1}\|_\infty \leq \xi \|\beta_\Delta - \tilde{\beta}_\Delta\|_\infty$$

où  $\xi$  est égal à  $2\Delta a^2 [Q + 2LM\bar{\beta} + L\bar{\beta}^2 C]$ . On suppose à présent que la relation est vraie à l'itération  $n$ ,

$$\|\lambda^n - \tilde{\lambda}^n\|_\infty \leq \mu \|\beta_\Delta - \tilde{\beta}_\Delta\|_\infty,$$

où  $\mu$  est une constante strictement positive. Montrons que l'inégalité du lemme 11 est satisfaite à l'itération  $n - 1$ . Sous la condition CFL du schéma (6.7), on a

$$\begin{aligned} |\lambda_i^{n-1} - \tilde{\lambda}_i^{n-1}| &\leq \frac{\Delta t}{\Delta a} \left| \frac{\lambda_{i+1}^n}{1 + \Delta t \beta_{i+1}^e} - \frac{\tilde{\lambda}_{i+1}^n}{1 + \Delta t \tilde{\beta}_{i+1}^e} \right| \\ &\quad + \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}\right) \left| \frac{\lambda_i^n}{1 + \Delta t \beta_i^e} - \frac{\tilde{\lambda}_i^n}{1 + \Delta t \tilde{\beta}_i^e} \right| \\ &\quad + 2\Delta t \Delta a \left| \beta_i^e \left( \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \beta_i^e u_i^{e,n} - q_{exp}^n \right) - \tilde{\beta}_i^e \left( \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \tilde{\beta}_i^e \tilde{u}_i^{e,n} - q_{exp}^n \right) \right|. \end{aligned} \quad (6.9)$$

On estime simultanément les 3 termes à droite de cette inégalité. Le premier terme est égal à

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda_{i+1}^n}{1 + \Delta t \beta_{i+1}^e} - \frac{\tilde{\lambda}_{i+1}^n}{1 + \Delta t \tilde{\beta}_{i+1}^e} \right| &\leq |\lambda_{i+1}^n - \tilde{\lambda}_{i+1}^n| \frac{1}{1 + \Delta t \beta_{i+1}^e} \\ &\quad + \tilde{\lambda}_{i+1}^n \left[ \frac{1}{1 + \Delta t \beta_{i+1}^e} - \frac{1}{1 + \Delta t \tilde{\beta}_{i+1}^e} \right]. \end{aligned}$$

Les fonctions  $\beta_\Delta$  et  $\tilde{\beta}_\Delta$  sont dans l'ensemble  $K_\Delta$ , par conséquent on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq i \leq Na} \left| \frac{\lambda_{i+1}^n}{1 + \Delta t \beta_{i+1}^e} - \frac{\tilde{\lambda}_{i+1}^n}{1 + \Delta t \tilde{\beta}_{i+1}^e} \right| &\leq \|\lambda^n - \tilde{\lambda}^n\|_\infty \frac{1}{1 + \Delta t \underline{\beta}}, \\ &\leq \mu \|\beta_\Delta - \tilde{\beta}_\Delta\|_\infty. \end{aligned}$$

Cette estimation s'applique pour le deuxième terme de l'inégalité (6.9), on cherche à présent une estimation pour le troisième terme. Pour cela, on s'appuie de la méthode d'estimation utilisée pour la preuve de ce lemme à l'instant  $N_t - 1$ . Le troisième terme de l'inégalité (6.9) est donc majoré par  $\eta \|\beta_\Delta - \tilde{\beta}_\Delta\|_\infty$  où  $\eta$  est une constante positive. On déduit alors que

$$\|\lambda^{n-1} - \tilde{\lambda}^{n-1}\|_\infty \leq \xi \|\beta_\Delta - \tilde{\beta}_\Delta\|_\infty$$

où  $\xi = 2\mu + \eta$ . Par récurrence, on montre que l'inégalité du lemme est satisfaite à chaque instant  $n$ .  $\square$

La dérivée du Lagrangien par rapport à la variable duale nous donne, à l'optimum, les équations d'état du schéma (6.7), c'est à dire

$$u_{i_0}^{e,n_0+1} = \frac{u_{i_0}^{e,n_0} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}\right) + u_{i_0-1}^{e,n_0} \frac{\Delta t}{\Delta a}}{1 + \Delta t \beta_{i_0}^e}, \quad i_0 = 1, Na, \quad n_0 = 0, N_t - 1$$

Par conséquent, à l'optimum, le Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}_\Delta(S^*) = \Delta t \sum_{n=1}^{Nt} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \beta_i^{e,*} u_i^{e,n}(\beta_\Delta^*) - q_{ext}^n \right]^2 \quad (6.10)$$

où  $S^*$  est l'optimum donné par  $(\beta_\Delta^*, u_\Delta^*, \lambda_\Delta^*)$  et  $u_i^{e,n}(\beta_\Delta^*)$  est obtenu en résolvant les équations d'état du schéma (6.7) avec  $\beta_\Delta^*$ . L'équation (6.10) est égale à la fonction coût discrète  $\mathcal{J}_\Delta(\beta_\Delta^*)$ . Donc en calculant la dérivée du Lagrangien par rapport à la variable  $\beta_\Delta$ , on calcule le gradient de la fonction coût, et qui est

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_\Delta}{\partial \beta_1^e} &= 2\Delta a \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} u_1^{e,n} (\Delta a \sum_{i=1}^{Na} \beta_i^e u_i^{e,n} - q_{exp}^n) + \sum_{n=0}^{Nt} \Delta t \lambda_1^n \frac{u_1^{e,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a})}{(1 + \Delta t \beta_1^e)^2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_\Delta}{\partial \beta_i^e} &= 2\Delta a \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} u_i^{e,n} (\Delta a \sum_{j=1}^{Na} \beta_j^e u_j^{e,n} - q_{exp}^n) + \sum_{n=0}^{Nt} \Delta t \lambda_i^n \frac{u_i^{e,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e,n}}{(1 + \Delta t \beta_i^e)^2}, \quad i = 2, Na \end{aligned}$$

On note ce vecteur  $g = \{\frac{\partial \mathcal{L}_\Delta}{\partial \beta_\Delta^e}\}_{i=1, Na}$ .

### Propriétés de la Hessienne.

On étudie les propriétés de la Hessienne c'est à dire de la dérivée seconde de la fonction Lagrangienne par rapport à la fonction  $\beta_\Delta$  utiles pour la preuve sur la convergence du schéma de descente de Quasi-Newton. Soit un sous ensemble de  $K_\Delta$  ouvert,  $D$ , qui contient un minimum local  $\beta_\Delta^*$  de  $\mathcal{L}_\Delta(S)$ . Le calcul de la Hessienne est

$$\begin{cases} \frac{\partial g_i}{\partial \beta_j^e} = 2\Delta a^2 \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} u_i^{e,n} u_j^{e,n}, & i, j = 1, Na, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial g_i}{\partial \beta_i^e} = 2\Delta a^2 \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} (u_i^{e,n})^2 - 2\Delta t^2 \sum_{n=0}^{Nt} \lambda_i^n \left( \frac{u_i^{e,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e,n}}{(1 + \Delta t \beta_i^e)^3} \right), & i = 2, Na. \end{cases} \quad (6.11)$$

Pour la preuve des deux lemmes suivants, on pose les constantes  $M > 0$ , et  $N > 0$  telles que

$$u_i^{e,n} \leq M, \quad \lambda_i^n \leq N, \quad i = 1, Na, \quad n > 0.$$

**Lemme 12** *Sous la condition CFL du schéma (6.7), la fonction Lagrangienne  $\mathcal{L}_\Delta$  est deux fois différentiable continues sur  $D$  par rapport à  $\beta_\Delta$ .*

**Preuve :** En supposant que la condition CFL du schéma (6.7) est vérifiée, on montre que la dérivée seconde est bornée en tous points.  $\square$

On note

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq Na} \sum_{j=1}^{Na} |a_{ij}|,$$

la norme infinie associée à une matrice  $A$  définie dans  $\mathfrak{R}^{Na \times Na}$ . Soit  $D_{\epsilon_1}$  l'ensemble donné par

$$D_{\epsilon_1} = \{\beta \in \mathfrak{R}^{Na}, \|\beta - \beta_\Delta^*\|_\infty < \epsilon_1\} \in D.$$

**Lemme 13** *Sous la condition CFL du schéma (6.7), la fonction  $\frac{\partial g}{\partial \beta_\Delta}$  est localement Lipschitzienne en  $\beta_\Delta^* \in D_{\epsilon_1}$ .*

**Preuve :** Soient les vecteurs  $S$  et  $\tilde{S}$  définis respectivement par  $(\beta_\Delta, u_\Delta, \lambda_\Delta)$  et  $(\tilde{\beta}_\Delta, \tilde{u}_\Delta, \tilde{\lambda}_\Delta)$ . On souhaite montrer l'existence d'une constante positive  $L$  telle que la relation suivante soit satisfaite

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial \beta_\Delta}(S) - \frac{\partial g}{\partial \beta_\Delta}(\tilde{S}) \right\|_\infty \leq L \|\beta_\Delta - \tilde{\beta}_\Delta\|_\infty, \quad \beta_\Delta, \tilde{\beta}_\Delta \in D_{\epsilon_1}.$$

Dans un premier temps on estime cette quantité en valeur absolue pour tous les  $i$  et  $j$  allant de 1 à  $N_a$  où  $i$  représente l'indice des lignes et  $j$  celle des colonnes. Pour  $i$  différent de  $j$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g_i}{\partial \beta_j^e}(S) - \frac{\partial g_i}{\partial \beta_j^e}(\tilde{S}) \right| &\leq 2\Delta a^2 \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} |u_i^{e,n} u_j^{e,n} - \tilde{u}_i^{e,n} \tilde{u}_j^{e,n}| \\ &\leq 2\Delta a^2 \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} |u_j^{e,n} (u_i^{e,n} - \tilde{u}_i^{e,n}) + \tilde{u}_i^{e,n} (u_j^{e,n} - \tilde{u}_j^{e,n})|, \\ &\leq 2\Delta a^2 \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ MC |\beta_i^e - \tilde{\beta}_i^e| + MC |\beta_j^e - \tilde{\beta}_j^e| \right], \\ &\leq 4\Delta a^2 TMC \|\beta - \tilde{\beta}\|_\infty. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Pour  $i$  égal à  $j$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g_i}{\partial \beta_i^e}(S) - \frac{\partial g_i}{\partial \beta_i^e}(\tilde{S}) \right| &\leq 2\Delta a^2 \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} |(u_i^{e,n} - \tilde{u}_i^{e,n})(u_i^{e,n} + \tilde{u}_i^{e,n})| \\ &+ 2\Delta t^2 \sum_{n=0}^{N_t} |\lambda_i^n - \tilde{\lambda}_i^n| \frac{u_i^{e,n+1}}{(1 + \Delta t \beta_i^e)^2} + |u_i^{e,n+1} - \tilde{u}_i^{e,n+1}| \frac{\tilde{\lambda}_i^n}{(1 + \Delta t \beta_i^e)^2} \\ &+ \tilde{\lambda}_i^n \tilde{u}_i^{e,n+1} \left| \frac{1}{(1 + \Delta t \beta_i^e)^2} - \frac{1}{(1 + \Delta t \tilde{\beta}_i^e)^2} \right| \end{aligned}$$

Soit en utilisant le lemme (7) du chapitre 5 de cette thèse et le lemme (11) de ce paragraphe, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g_i}{\partial \beta_i^e}(S) - \frac{\partial g_i}{\partial \beta_i^e}(\tilde{S}) \right| &\leq 4\Delta a^2 TCM \|\beta - \tilde{\beta}\|_\infty + \|\beta - \tilde{\beta}\|_\infty (2\Delta a T \xi M) \\ &+ \|\beta - \tilde{\beta}\|_\infty (2\Delta a TCN) + 2NM. \end{aligned} \quad (6.13)$$

On fait la somme sur toutes les mailles  $i$  et on se sert des résultats (6.12) et (6.13), on déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_a} \left| \frac{\partial g_i}{\partial \beta_i^e}(S) - \frac{\partial g_i}{\partial \beta_i^e}(\tilde{S}) \right| &\leq [4\Delta a L TMC + 2\Delta a T \xi M + 2\Delta a TCN] \|\beta - \tilde{\beta}\|_\infty \\ &+ [2NM] \|\beta - \tilde{\beta}\|_\infty. \end{aligned}$$

En posant  $L$  égal à  $4\Delta a L TMC + 2\Delta a T \xi M + 2\Delta a TCN + 2NM$  qui est une constante positive, on démontre le lemme.  $\square$

### Algorithme de descente de Quasi-Newton.

Cette méthode consiste à construire une suite  $\beta_\Delta^k$ , où  $k$  est un entier non nul, qui converge vers l'optimum  $\beta_\Delta^*$  du problème  $[P_1]_\Delta$ . Pour cela, on se donne un point initial  $\beta_\Delta^0$ , puis on calcule la direction de recherche selon la formule

$$d^k = -B_k^{-1} g^k,$$

où  $B_k$  est une approximation définie et positive de la Hessienne et  $g^k$  le gradient calculé au point  $\beta_\Delta^k$ . Une ligne de recherche est ensuite utilisée pour trouver un nouveau point  $\beta_\Delta^{k+1}$  :

$$\beta_\Delta^{k+1} = \beta_\Delta^k - \lambda B_k^{-1} g^k, \quad \lambda \in (0, 1] \quad (6.14)$$

tel que

$$\mathcal{J}_\Delta(\beta_\Delta^{k+1}) \leq \mathcal{J}_\Delta(\beta_\Delta^k) + \alpha (g^k)^T d^k, \quad \alpha \in (0, 0.5).$$

Finalement, la condition d'optimalité  $\|g(\beta_\Delta^k)\| = \epsilon$  est vérifiée, où  $\epsilon$  est la tolérance du gradient. Quand l'optimum n'est pas trouvé,  $B_k$  est mis à jour via la formule BFGS suivante

$$B_k \leftarrow B_k - \frac{B_k s s^T B_k}{s^T B_k s} + \frac{y y^T}{y^T s},$$

où  $s$  et  $y$  sont donnés respectivement par  $\beta_\Delta^{k+1} - \beta_\Delta^k$  et  $g^{k+1} - g^k$ . Une autre direction de recherche est alors calculée pour commencer la prochaine itération.

**Théorème 5** Soit la fonction coût définie dans  $[P_\Delta]_1$ . Soient la matrice  $B_k$  mis à jour par la formule BFGS et la suite  $\beta_\Delta^k$  générée par l'algorithme QN. Alors, pour  $v \in (0, 1)$ , et sous la condition CFL du schéma (6.7), il existe une constante positive  $\epsilon$  et  $\sigma$  tel que si

$$\beta_\Delta^0 \in B(\beta_\Delta^*; \epsilon) \in D$$

et

$$\|B_0 - \frac{\partial g}{\partial \beta_\Delta}(\beta_\Delta^*)\|_\infty \leq \sigma$$

la suite  $\beta_\Delta^k$  est bien définie et converge linéairement vers  $\beta_\Delta^*$  avec

$$\|\beta_\Delta^{k+1} - \beta_\Delta^*\|_\infty \leq v \|\beta_\Delta^k - \beta_\Delta^*\|_\infty. \quad (6.15)$$

**preuve :** Soit l'ensemble  $\mathcal{N}$  définit par

$$\mathcal{N} = \{B \in \mathfrak{R}^{N_a} \times \mathfrak{R}^{N_a} \mid \|B - \frac{\partial g}{\partial \beta_\Delta}(\beta_\Delta^*)\| \leq \sigma\}.$$

On montre que la relation (6.15) est vraie pour  $k$  nul.

$$\begin{aligned} \beta_\Delta^1 - \beta_\Delta^* &= \beta_\Delta^0 - \beta_\Delta^* - \lambda B_0^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial \beta_\Delta}, \\ &= -\lambda B_0^{-1} \left[ (\beta_\Delta^0 - \beta_\Delta^*) \left( \frac{\partial^2 \mathcal{L}^*}{\partial \beta_\Delta^2} - \frac{B_0}{\lambda} \right) \right] \\ &\quad - \lambda B_0^{-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial \beta_\Delta} + \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \beta_\Delta} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}^*}{\partial \beta_\Delta^2} (\beta_\Delta^0 - \beta_\Delta^*) \right]. \end{aligned}$$

On calcule la norme  $L^\infty$  de cette dernière équation. On prend  $\lambda$  égal à 1 et  $B_0$  dans l'ensemble  $\mathcal{N}$  alors par le lemme de Banach (Dennis et al. 1983, th 3.1.4] la matrice  $B_0$  est inversible et on a l'estimation

$$|B_0^{-1}| \leq b_2.$$

De plus le lemme (13) de ce paragraphe nous donne

$$\|g(\beta_\Delta) - g(\beta'_\Delta) - \frac{\partial g}{\partial \beta_\Delta}(\beta_\Delta^*)(\beta_\Delta - \beta'_\Delta)\|_\infty \leq L \max(\|\beta_\Delta - \beta_\Delta^*\|_\infty, \|\beta'_\Delta - \beta_\Delta^*\|_\infty) \|\beta_\Delta - \beta'_\Delta\|_\infty$$

où  $\beta_\Delta$  et  $\beta'_\Delta$  sont dans  $D_{\epsilon_1}$ . On pose  $\epsilon = \max(\|\beta_\Delta - \beta_\Delta^*\|_\infty, \|\beta'_\Delta - \beta_\Delta^*\|_\infty)$ , on a

$$\begin{aligned} \|\beta_\Delta^1 - \beta_\Delta^*\|_\infty &\leq \|\beta_\Delta^0 - \beta_\Delta^*\|_\infty \|B_0^{-1}\|_\infty \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}^*}{\partial \beta_\Delta^2} - B_0 \right\|_\infty \\ &\quad + \|B_0^{-1}\|_\infty \left\| \frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial \beta_\Delta} + \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \beta_\Delta} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}^*}{\partial \beta_\Delta^2} (\beta_\Delta^0 - \beta_\Delta^*) \right\|_\infty \\ &\leq (b_2 \sigma + b_2 L \epsilon) \|\beta_\Delta^0 - \beta_\Delta^*\|_\infty \end{aligned}$$

Si on choisit  $\epsilon$  et  $\sigma$  suffisamment petit tel que

$$b_2(\sigma + L\epsilon) \leq \nu$$

alors

$$|\beta_\Delta^1 - \beta_\Delta^*| \leq \nu |\beta_\Delta^0 - \beta_\Delta^*| < \epsilon$$

et  $\beta_\Delta^1 \in B(\beta_\Delta^*; \epsilon)$ . En appliquant cette démonstration à tous les rangs  $k$ , on montre le théorème.  $\square$

### La solution du problème discret converge vers la solution du problème continu.

Soit  $\pi$  l'interpolée de degré 1 de la fonction  $\beta_\Delta$  de l'espace  $K_\Delta$  obtenue par l'algorithme de descente (QN). On construit la fonction telle que

$$\pi\beta_\Delta(a_i) = \beta_i, \quad \text{et} \quad \pi\beta_\Delta(a_{i+1}) = \beta_{i+1}, \quad i = 1, N_a,$$

soit

$$\pi\beta_\Delta(a) = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{a_i - a_{i+1}}(a - a_i) + \beta_i, \quad i = 1, N_a.$$

Clairement, la fonction  $\pi\beta_\Delta$  est dans l'ensemble  $K$ . On souhaite que cette fonction vérifie la propriété suivante

$$\|\pi\beta_\Delta - \beta\|_\infty \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} 0.$$

Pour avoir la convergence, on s'appuie sur le théorème de Rellich-Kondrachov qui nous donne l'injection compacte de l'espace  $W^{1,1}([0, L])$  dans l'espace  $C([0, L])$  : c'est à dire que de toute suite bornée de  $W^{1,1}([0, L])$ , on peut extraire une sous suite qui converge dans  $C([0, L])$ , de plus la limite est dans  $W^{1,1}([0, L])$ . Il nous faut alors montrer que  $\partial_a \pi\beta_\Delta \in L^1([0, L])$  :

$$\|\partial_a \pi\beta_\Delta(a)\|_{L^1} = \int_0^L \left| \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \right| da = \left| \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \right| L \leq |\beta_i - \beta_{i+1}| N_a \leq 2\bar{\beta} N_a$$

et que  $\pi\beta_\Delta \in L^1([0, L])$  :

$$\begin{aligned} \|\pi\beta_\Delta(a)\|_{L^1} &= \int_0^L \left| \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{a_i - a_{i+1}}(a - a_i) + \beta_i \right| da \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \right| L^2 + \left| \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \right| a_i L + \bar{\beta} L \leq \bar{\beta} L \end{aligned}$$

**La valeur de la fonction coût du problème discret converge vers celle du problème continu à l'optimum.**

On note  $\pi u_\Delta$  l'interpolée de la solution  $u_i^{e,n}(\beta_\Delta)$  en tous les points  $i$  et  $n$  du maillage et  $\pi\beta_\Delta$  l'interpolée de la solution optimale  $\beta_\Delta^*$ . D'après le théorème (2) du chapitre 3 de cette thèse, on a

$$\int_0^T \int_0^L |\pi u_\Delta(t, a) - u(t, a)| da dt \xrightarrow{\Delta a, \Delta t \rightarrow 0} 0.$$

De là, on déduit

**Théorème 6** Soient  $\beta^0$  la donnée initiale du schéma (QN) dans l'espace  $K$  et la fonction coût du problème  $[P_1]$ . Dès que les pas de discrétisation  $\Delta a$  et  $\Delta t$  tendent vers la valeur nulle, on a

$$|J_\Delta(\beta_\Delta^k) - J(\beta^*)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

**Preuve :** On décompose la preuve en deux étapes. La première étape consiste à montrer que la suite  $\{J_\Delta^k(\beta_\Delta^k)\}_k$ , construite à partir de la suite  $\{\beta_\Delta^k\}$  converge vers  $J_\Delta^*$  qui est la valeur de la fonction coût discrète à l'optimum  $\beta_\Delta^*$ . Pour cela, on utilise la méthode de la preuve du théorème (4), et on a

$$\begin{aligned} J_\Delta(\beta_\Delta^k) &= \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \beta_{i,\Delta}^k u_i^{e,n}(\beta_\Delta^k) - q_{exp}^n \right]^2 \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \beta_{i,\Delta}^* u_i^{e,n}(\beta_\Delta^*) - q_{exp}^n \right]^2 = J_\Delta(\beta_\Delta^*). \end{aligned}$$

On montre ensuite que  $J_\Delta^*(\beta_\Delta^*)$  tend vers  $J(\beta^*)$  lorsque les pas de discrétisation en âge  $\Delta a$  et en temps  $\Delta t$  tendent vers 0.

$$\begin{aligned} J_\Delta(\beta_\Delta^*) &\sim \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \int_{C_i} \pi \beta_\Delta^*(a) \pi u_\Delta(t, a) da - q_{exp}(t) \right]^2 dt \\ &\sim \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \int_{C_i} (\pi \beta_\Delta^* - \beta^*)(a) \pi u_\Delta(t, a) + \beta^*(a) (\pi u_\Delta - u)(t, a) da \right]^2 dt \\ &+ \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \int_{C_i} \beta^*(a) u(t, a) da - q_{exp}(t) \right]^2 dt \\ &\xrightarrow{\Delta a, \Delta t \rightarrow 0} \int_0^T \left[ \int_0^L \beta^*(a) u(t, a) da - q_{exp}(t) \right]^2 dt = J(\beta^*). \end{aligned} \quad \square$$

### 6.3.2 Algorithme de résolution.

La programmation est faite sur le logiciel Absoft. On se sert de la librairie IMSL pour résoudre le problème d'optimisation. Parmi les routines disponibles, Uming est dédiée à l'algorithme de quasi-Newton. Les solutions obtenues avec cette routine prennent des valeurs négatives. On choisit alors d'utiliser le programme BCONG qui permet l'ajout de contraintes sur le contrôle. La solution est calculée telle qu'elle soit définie dans un domaine précis. On prend le domaine  $[0, +\infty[$ . Il existe aussi la routine BCONF pour la minimisation avec contraintes sur la solution cherchée. La différence avec BCONG est que le gradient est calculé à partir d'une méthode de différences finies. L'utilisation des ces deux routines sur un même calcul permet de comparer les solutions obtenues et de rectifier le calcul du gradient dans BCONG si besoin est. On pourrait utiliser la routine BCONF pour tous les calculs, mais celle ci est coûteuse en temps de calculs. A chaque itération la routine BCONF calcule la valeur de la fonction coût autant de fois qu'il y a d'inconnu. la routine BCONG appelle à chaque itération une fois la fonction coût et une fois le gradient. En gardant des pas de temps et d'âge petits, et un nombre d'itérations raisonnables, la routine BCONF donne rapidement la solution optimale.

L'appel de cette routine est possible à condition de définir dans deux sous programmes le calcul de la fonction coût et le calcul du gradient de la fonction coût. Pour corrélérer l'ensemble, on ajoute deux autres programme pour calculer la valeur de la densité  $u_i^{e,n}$ , pour  $i$  allant de 1 à  $N_a$ , et pour  $n$  allant de 1 à  $N_t$ , et la valeur de la variable duale  $\lambda_i^n$ , pour  $i$  allant de 1 à  $N_a$ , et pour  $n$  allant de 1 à  $N_t$ . Ainsi, le programme fonctionne de la manière suivante

- 1- Initialisation du vecteur  $\beta_\Delta^0$ ,
- 2- Calcul de la densité oeuf  $u_\Delta^e$  avec le schéma (VF) donné en (6.7),
- 3- Calcul de la variable duale  $\lambda_\Delta$  avec le système (6.8),
- 4- Calcul du gradient  $g = \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_\Delta}{\partial \beta_\Delta} \right\}$
- 5- Calcul de  $\beta_\Delta^k$  avec la formule (QN) donnée en (6.14). Puis on reprend à l'étape 2 jusqu'à , arrêt de l'algorithme.

### 6.3.3 Résultats numériques.

On résout numériquement le problème  $[P_1]$  avec l'algorithme décrit dans le paragraphe précédent. Pour cela, on fixe le pas d'âge et celui en temps à 0,1. L'âge maximal de vie est pris égal à 10, et le temps maximal des observations est fixé à 10. La condition initiale de la densité oeuf est donnée par la fonction gaussienne suivante

$$u_0^e(a) = e^{-\left(\frac{a-1}{0,25}\right)^2}, \quad a \in [0, L]. \quad (6.16)$$

La population oeuf est âgée en moyenne d'1 jour au début de l'expérience.

On cherche l'optimum  $\beta_*^e$  de la fonction coût tel que  $\mathcal{J}(\beta_*^e)$  soit nulle. Autrement dit, on souhaite trouver un  $\beta_*^e$  tel que la dynamique d'éclosion calculée à partir de l'équation (6.2) avec ce taux d'éclosion soit exactement la dynamique d'éclosion expérimentale  $q_{exp}$ . Pour parvenir à ce résultat, on se construit une dynamique d'éclosion expérimentale en résolvant l'équation (6.2) et le problème d'évolution (6.1) avec un taux d'éclosion donné  $\beta_{ex}^e$ , puis et l'on l'utilise dans l'algorithme de minimisation pour trouver la solution de  $[P_1]$ , notée  $\beta_{app}^e$ .

A partir d'un taux d'éclosion prenant la forme d'une fonction gaussienne (courbe noire du graphe (a) de la figure (6.1)),

$$\beta_{ex}^e(a) = e^{-\left(\frac{a-7}{0,5}\right)^2},$$

et de la condition initiale précisée en (6.16), la dynamique d'éclosion expérimentale est une fonction gaussienne dont sa représentation graphique est la courbe noire du graphe (b) de la figure (6.1). L'algorithme de (QN) trouve pour cette dynamique expérimentale le taux d'éclosion tracé en bleu sur le graphe (a) de la figure (6.1).

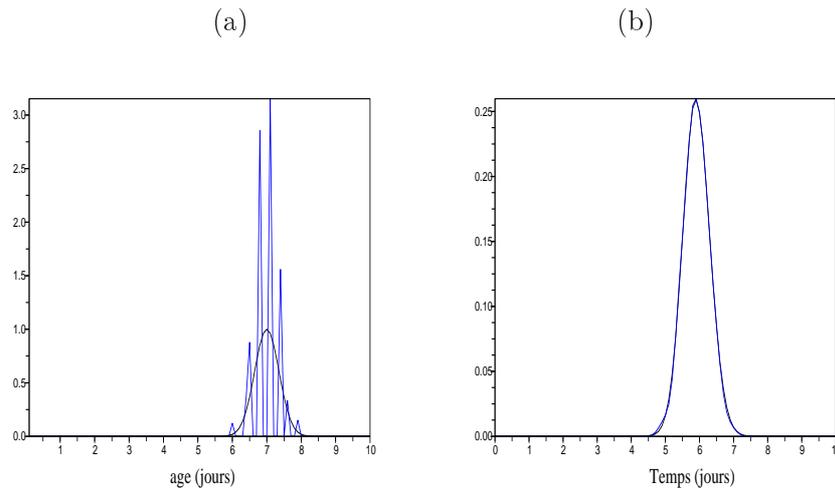


FIG. 6.1: (a) : Taux d'éclosion en fonction de l'âge. La courbe noire représente le taux exacte et la courbe bleue est le taux d'éclosion estimé par l'algorithme de (QN). (b) : Dynamique d'éclosion en fonction du temps. La courbe noire et la courbe bleue sont obtenues en calculant l'équation (6.2) avec respectivement le taux exact et le taux estimé.

Cette solution est oscillante sur le domaine en âge  $[6,8]$  et est nulle en dehors de cet intervalle. La dynamique d'éclosion calculée avec ce taux estimé est superposée à la dynamique d'éclosion exacte sur le graphe (b) de la figure (6.1). Bien que le support des fonctions  $\beta_{ex}^e$  et  $\beta_{app}^e$  est identique, ces fonctions ne se confondent pas. Par conséquent, ces résultats montrent que le problème  $[P_1]_\Delta$  n'admet pas une unique solution.

On présente ci-dessous un deuxième résultat sur l'estimation du taux d'éclosion. La fonction  $q_{exp}$  est calculée avec le taux d'éclosion et la donnée initiale suivante

$$\beta_{ex}^e(a) = e^{-\left(\frac{a-6}{0,5}\right)^2}, \quad u_0^e(a) = e^{-\left(\frac{a-5}{0,5}\right)^2}, \quad a \in [0, L].$$

La population oeuf est composée, au début de l'expérience, d'individus âgés de 4 à 6 jours. L'éclosion de cette population commence très tôt comme le montre la courbe noire sur le graphe (b) de la figure (6.2). Pour cette dynamique d'éclosion, la solution obtenue pour le problème  $[P_1]$  est donnée en bleu sur le graphe (a) de la figure (6.2).

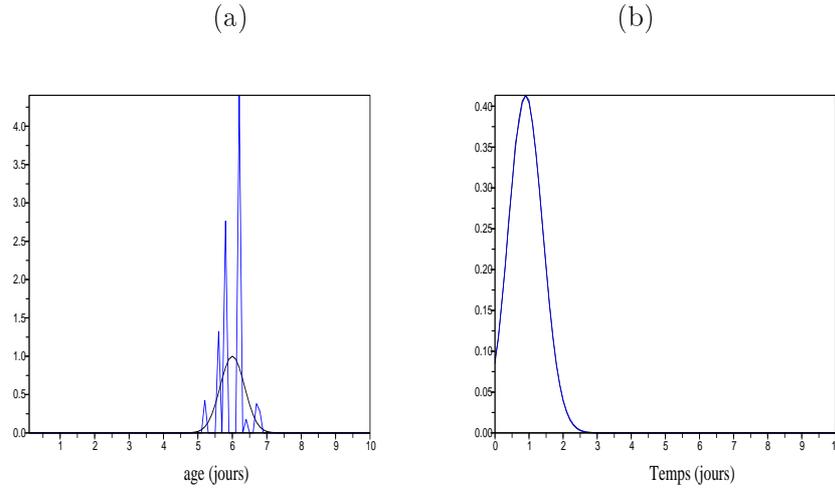


FIG. 6.2: (a) : Taux d'éclosion en fonction de l'âge. La courbe noire représente le taux exact et la courbe bleue est le taux d'éclosion estimé par l'algorithme de (QN). (b) : Dynamique d'éclosion en fonction du temps. La courbe noire et la courbe bleue sont obtenues en calculant l'équation (6.2) avec respectivement le taux exact et le taux estimé.

Le problème d'optimisation n'a pas d'unique optimum pour cette donnée expérimentale.

La dynamique d'éclosion d'une cohorte oeuf sous la forme d'une fonction gaussienne est modélisée dans le modèle (6.1) pour, au moins, deux valeurs de la fonction taux d'éclosion  $\beta^e$ . En fonction de l'étude qu'on souhaite faire sur la dynamique des populations Eudémis avec le modèle mathématique, on peut utiliser un de ces taux d'éclosion. Par exemple, pour une étude de ces populations en fonction du comportement des individus, on choisira le taux d'éclosion oscillant pour avoir les âges précis d'éclosion alors que pour une étude sur la taille de cette population au cours du temps on utilisera le taux d'éclosion gaussien.

### D'où viennent ces oscillations ?

Il y a plusieurs explications sur l'origine de ces oscillations. La première est que l'observation qu'on s'est construite  $q_{exp}$  est une approximation de la valeur réelle. En effet, pour calculer la dynamique d'éclosion à chaque instant  $t$ , on utilise la valeur approchée de la densité oeuf  $u_{ex}^e(t, a)$  qui est donnée par le schéma (6.7), c'est à dire qu'on a  $u^{app} \sim u^{ex}$ . La dynamique expérimentale utilisée dans l'algorithme de descente est différente de  $q_{exp}$ ,

$$q_{exp}(t) = \int_0^L \beta_{ex}^e u_{ex}^e(t, a) da \sim \int_0^L \beta_{ex}^e u_{app}^e(t, a) da = q'_{exp}(t)$$

La deuxième raison est que la solution donnée par le schéma (QN) est une approximation de la solution exacte. L'algorithme de minimisation calcule à chaque itération  $k$  l'optimum tel que

$$\text{Min}_{\beta} \int_0^T \left[ \int_0^L \beta^k v(t, a) da - q'_{exp}(t) \right]^2 dt$$

où  $v$  est la valeur approchée de la densité oeufs  $u^e$  calculée avec  $\beta^k$ . Quelque soit l'origine de l'erreur numérique, l'algorithme de minimisation a pour objectif de trouver une solution tel que  $q_{exp}$  s'identifie à  $\int_0^L \beta^k v(t, a) da$ . L'ajout d'informations supplémentaires sur la donnée expérimentale  $q_{exp}$  ou la modification complète de cette donnée, par exemple une distribution de la population en fonction de l'âge à un instant, permettrait de trouver un unique taux d'éclosion.

### Cas particulier où on a unicité de la solution.

On présente deux exemples où la solution du problème  $[P_1]$  est unique. La dynamique d'éclosion  $q_{exp}$  est une fonction gaussienne construite à partir du taux d'éclosion suivant

$$\beta_{ex}^e(a) = e^{-\left(\frac{a-7}{0,5}\right)^2}, \quad a \in [0, L].$$

La condition initiale est une fonction créneau égale à 1 sur l'intervalle  $[0, 1]$  dans le premier exemple et une fonction Dirac en l'âge 1 dans le deuxième exemple. Les taux estimés par l'algorithme de Quasi-Newton sont représentés en bleu sur la figure (6.3). Ces courbes coïncident avec la valeur exacte du taux d'éclosion donné au dessus.

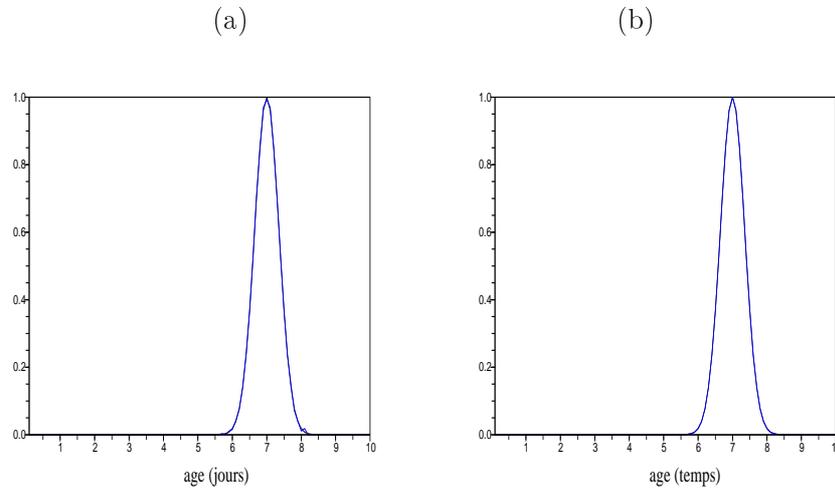


FIG. 6.3: Taux d'éclosion en fonction de l'âge. La courbe noire représente le taux exact et la courbe bleue est le taux d'éclosion estimé par l'algorithme de (QN). (a) : La donnée initiale est une fonction créneau égale à 1 sur l'intervalle  $[0, 1]$ . (b) : La donnée initiale est une fonction Dirac en l'âge 1.

Le problème d'estimation  $[P_1]_{\Delta}$  d'un taux d'éclosion gaussien à partir d'une dynamique d'éclosion gaussienne est unique quand la donnée initiale de la densité oeuf est une fonction constante.

## 6.4 Régularisation de la solution.

On souhaite obtenir une unique solution pour le problème  $[P_1]$  quelque soit la valeur de la donnée initiale de la densité oeuf  $u_0^e$ . Pour cela, on va imposer des conditions de régularité sur la solution cherchée en pénalisant la fonction coût  $\mathcal{J}$ . Le problème d'estimation devient

$$[P_1]' = \text{Min}_{\beta^e \in K} [\mathcal{F}(\beta^e) = \mathcal{J}(\beta^e) + \mu \|\beta^e\|_2^2 + \eta \|\partial_a \beta^e\|_2^2]$$

où  $J(\beta^e)$  est la fonction coût du problème  $[P_1]$  et  $\mu$  et  $\eta$  sont des constantes positives plus petites que 1.

### Résolution du problème d'estimation continu.

La fonction Lagrangienne s'écrit pour ce nouveau problème

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(S) &= \mathcal{F}(\beta^e) + \int_0^T \int_0^L p(t, a) [\partial_t u^e + \partial_a u^e + \beta^e(a) u^e] da dt \\ &= H(S) + \mu \|\beta^e\|_2^2 + \eta \|\partial_a \beta^e\|_2^2\end{aligned}$$

où  $S$  est le vecteur  $(\beta^e, u^e, p)$  et  $H(S)$  est la fonction Lagrangienne du problème  $[P_1]$  donnée par

$$H(S) = \mathcal{J}(\beta^e) + \int_0^T \int_0^L p(t, a) [\partial_t u^e + \partial_a u^e + \beta^e(a) u^e] da dt.$$

Les dérivées de la fonction  $\mathcal{L}'$  par rapport à la variable duale  $p$  et par rapport à la densité  $u^e$  au point  $S^*$  sont les dérivées du problème  $[P_1]$  et sont égales à l'équation hyperbolique du système (6.1) dans le premier cas et le problème dual (6.4) dans le deuxième cas. La dérivée de la fonction Lagrangienne  $\mathcal{L}'$  par rapport à  $\beta^e$  est,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}'(S)}{\partial \beta^e}, h \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \left\langle \frac{\partial H(S)}{\partial \beta^e}, h \right\rangle_{L^2(\Omega)} + 2\mu \int_0^L \beta^e h da - 2\eta \int_0^L \frac{\partial^2 \beta^e}{\partial a^2} h da \\ &\quad + 2\eta \frac{\partial \beta^e}{\partial a}(L) h(L) - 2\eta \frac{\partial \beta^e}{\partial a}(0) h(0)\end{aligned}$$

pour toutes fonctions  $h$  de l'espace  $L^2([0, L])$  où le domaine  $\Omega$  est égal à  $[0, L] \times [0, T]$ . La dérivée de la fonction  $H$  par rapport à  $\beta^e$  est

$$\left\langle \frac{\partial H(S)}{\partial \beta^e}, h \right\rangle_{L^2(\Omega)} = 2 \left\langle u^e \left( \int_0^L \beta^e u^e da - q_{exp}(t) \right) + pu, h \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Le calcul du gradient de la fonction Lagrangienne  $\mathcal{L}'$  à l'optimum  $S^*$  nous permet d'établir l'équation suivante pour l'estimation du taux d'éclosion  $\beta^*$ ,

$$\begin{cases} 2u^*(t, a) f^*(t) - 2u^*(t, a) \int_t^T e^{-\int_t^s \beta^*(\tau) d\tau} \beta^*(a) f^*(s) ds + 2\mu \beta^*(a) - 2\eta \frac{\partial^2 \beta^*}{\partial a^2}(a) = 0, \\ \frac{\partial \beta^*}{\partial a}(L) = \frac{\partial \beta^*}{\partial a}(0) = 0, \end{cases}$$

pour  $a$  et  $t$  définis dans respectivement  $[0, L]$  et  $[0, T]$ . Les fonctions  $u^*$  et  $f^*$  sont données par

$$u^*(t, a) = \begin{cases} u_0^e(a-t) e^{-\int_{a-t}^a \beta^*(s) ds}, & a > t \\ 0, & a \leq t \end{cases} \quad f^*(t) = \left( \int_0^L \beta^*(s) u^*(t, s) da - q_{exp}(t) \right).$$

### Résolution du problème d'estimation discret.

On résout le problème  $[P_1]'$  de manière numérique en utilisant les méthodes d'approximation développées pour le problème  $[P_1]$ . Le Lagrangien du problème d'optimisation avec pénalisation de la fonction coût s'écrit sous la forme discrète

$$\mathcal{L}'_{\Delta}(S_{\Delta}) = H_{\Delta}(S_{\Delta}) + \mu \|\beta_{\Delta}^e\|_2^2 + \eta \|\partial_a \beta_{\Delta}^e\|_2^2.$$

L'approximation de la fonction  $H$  est notée  $H_{\Delta}$  et est égale à la fonction Lagrangienne  $\mathcal{L}_{\Delta}$  du problème discret  $[P_1]_{\Delta}$

$$\begin{aligned}H_{\Delta}(S_{\Delta}) &= \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \beta_i^e u_i^{e,n} - q_{exp}^n \right]^2 \\ &\quad + \sum_{n=0}^{Nt} \sum_{i=1}^{Na} \lambda_i^n \left( u_i^{e,n+1} - \frac{u_i^{e,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + u_{i-1}^{e,n} \frac{\Delta t}{\Delta a}}{1 + \Delta t \beta_i^e} \right),\end{aligned}$$

où  $\lambda_\Delta$  est la variable de Lagrange définie par  $\{\lambda_i^n\}$  pour  $i$  allant de 1 à  $N_a$  et pour  $n$  allant de 0 à  $N_t$  et  $S_\Delta$  est le vecteur  $(\beta_\Delta^e, u_\Delta^e, \lambda_\Delta)$ . La dérivée de  $\mathcal{L}'_\Delta$  par rapport à la variable d'état  $u_\Delta^e$  et à l'optimum donne le système (6.8) du problème  $[P_1]_\Delta$  et la dérivée de cette fonction par rapport à la variable duale donne à l'optimum le système (6.7). Seule la dérivée par rapport au contrôle  $\beta_\Delta^e$  change

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_\Delta(S_\Delta)}{\partial \beta_{i_0}^e} = \frac{\partial H_\Delta(S_\Delta)}{\partial \beta_{i_0}^e} + 2\mu\Delta a\beta_{i_0}^e - 4\eta\left(\frac{\beta_{i_0+1}^e - 2\beta_{i_0}^e + \beta_{i_0-1}^e}{2\Delta a^2}\right),$$

pour  $i_0$  allant de 1 à  $N_a$  avec

$$\frac{\partial H_\Delta(S_\Delta)}{\partial \beta_i^e} = 2\Delta a\Delta t \sum_{n=0}^{N_t} u_i^{e,n} (\Delta a \sum_{j=1}^{N_a} \beta_j^e u_j^{e,n} - q_{exp}^n) + \sum_{n=0}^{N_t} \Delta t \lambda_i^n \frac{u_i^{e,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e,n}}{(1 + \Delta t \beta_i^e)^2}.$$

L'algorithme de Quasi-Newton s'écrit pour le problème d'optimisation  $[P_1]'$

$$\beta_\Delta^{e,k+1} = \beta_\Delta^{e,k} - \lambda \frac{\partial H_\Delta(S_\Delta)}{\partial \beta^e} B_k^{-1} - 2\lambda\mu\Delta a\beta_\Delta^{e,k} B_k^{-1} + 4\lambda\eta \left( \frac{\partial^2 \beta_\Delta^{e,k}}{\partial a^2} \right) B_k^{-1}, \quad (6.17)$$

pour  $k$  positif,  $\lambda$  définit dans  $[0, 1]$  et  $B_k$  est une approximation définie positive de la Hessienne. La dérivée seconde de la fonction  $\mathcal{L}'_\Delta$  par rapport à  $\beta_\Delta^e$  est

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}'_\Delta(S_\Delta)}{\partial \beta_{i_0}^2} = \frac{\partial^2 H_\Delta(S_\Delta)}{\partial \beta_{i_0}^2} + 2\mu\Delta a + \frac{4\eta}{\Delta a^2}, \quad i_0 = 1, N_a,$$

où la dérivée seconde de la fonction  $H_\Delta$  par rapport à  $\beta_\Delta^e$  est donnée dans (6.11) et  $2\mu\Delta a + \frac{4\eta}{\Delta a^2}$  est strictement positif. La Hessienne a les mêmes propriétés que la Hessienne du problème de minimisation  $[P_1]_\Delta$ , à savoir que c'est une fonction bornée et localement Lipschitzienne à l'optimum. D'après le théorème (5), le schéma Quasi Newton construit pour le problème  $[P_1]'$  converge vers un optimum  $\beta_\Delta^*$ .

Le troisième terme à droite de l'égalité de l'équation (6.17) permet une convergence plus rapide vers l'optimum alors que le dernier terme réduit les irrégularités de la solution à chaque itération. La solution obtenue pour ce problème de minimisation est une approximation de la solution du problème  $[P_1]$ , à condition que  $\eta$  et  $\mu$  tendent vers la valeur nulle.

### Résultats graphiques.

On applique l'algorithme de résolution défini au paragraphe (6.3.2) précédent avec la formule (6.17) pour obtenir une solution numérique au problème d'estimation du taux d'éclosion  $[P_1]'$ . La dynamique expérimentale  $q_{exp}$  est construite à partir de l'équation (6.2) et du problème d'évolution (6.1). La condition initiale sur la densité oeuf et le taux d'éclosion sont pris égaux à

$$u_0^e(a) = e^{-\left(\frac{a-1}{0,25}\right)^2}, \quad \beta_{ex}(a) = e^{-\left(\frac{a-6}{0,5}\right)^2}, \quad [0, L].$$

où  $L$  est fixé à 10. Les pas de temps et d'âge sont de l'ordre du dixième. La fonction  $q_{exp}$  est une gaussienne centrée au 5ème jour après la naissance des oeufs et est donnée en noir sur le graphe (d) de la figure 6.4. La solution du problème  $[P_1]'$  est obtenue pour différente valeur de  $\eta$  et de  $\mu$ .

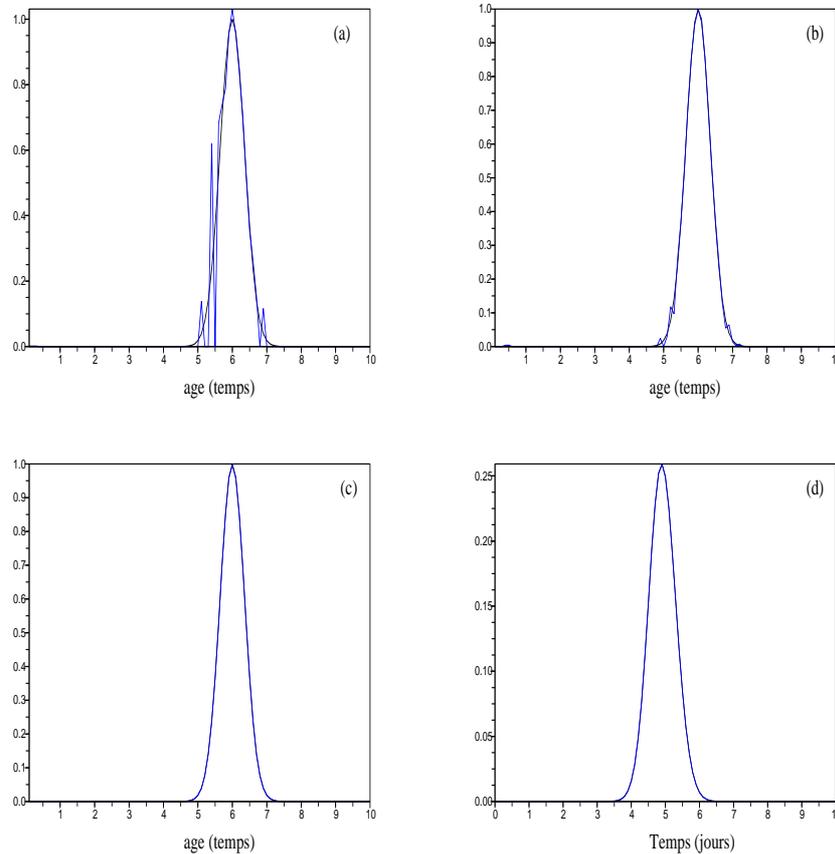


FIG. 6.4: (a), (b), (c) : taux d'éclosion en fonction de l'âge. La courbe noire représente le taux exact et la courbe bleue est le taux d'éclosion estimé par l'algorithme de (QN). (d) : dynamiques d'éclosion en fonction du temps. La courbe noire et la courbe bleue sont obtenues en calculant l'équation (6.2) avec respectivement le taux exact et le taux estimé.

La courbe bleue du graphe (a) de la figure 6.4 représente la solution du problème d'optimisation  $[P_1]'$  avec  $\eta$  égal à  $10^{-7}$  et  $\mu$  égal à la valeur nulle. L'erreur entre la solution et le taux d'éclosion est supérieure à l'erreur du schéma de Quasi-Newton qui est d'ordre 1 autour de l'âge 5 et inférieure à 0,1 pour le reste du domaine en âge. La solution du problème  $[P_1]'$  avec  $\eta$  égal

à la valeur nulle et  $\mu$  égal à  $10^{-7}$  est tracée en bleu sur le graphe (b) de la figure 6.4. Le taux d'éclosion estimé pour ce problème se superpose à la solution exacte. Le problème  $[P_1]'$  admet pour ces valeurs de  $\eta$  et de  $\mu$  un unique optimum. La courbe bleue du graphe (c) de la figure 6.4 est la solution du problème  $[P_1]'$  avec les constantes  $\eta$  et  $\mu$  égales à  $10^{-7}$ . Le taux d'éclosion pour ce problème d'estimation  $[P_1]'$  avec une dynamique d'éclosion gaussienne est unique.

La valeur des constantes  $\eta$  et  $\mu$  est proche de la valeur nulle dans les 3 exemples présentés, la solution du problème  $[P_1]'$  est donc une solution du problème  $[P_1]$ . On conclut alors que le problème initial d'estimation du taux d'éclosion  $[P_1]$  admet une unique solution.

Figure 6.4	(a)	(b)	(c)
$\mu$	$10^{-7}$	0	$10^{-7}$
$\eta$	0	$10^{-7}$	$10^{-7}$
$\mathcal{J}(\beta_{ex}^e)$	$2,310^{-7}$	$1,0310^{-8}$	$1,2710^{-7}$
$\mathcal{F}(\beta_{ex}^e)$	$2,210^{-7}$	$3,7210^{-8}$	$1,5810^{-7}$
$\ q_{exp} - q_{app}\ _\infty$	$6,910^{-4}$	$1,1310^{-4}$	$5,4210^{-4}$
$\mu \ \beta_{app}\ _2^2$	$6,610^{-9}$	0	$6,2410^{-9}$
$\eta \ \partial_a \beta_{app}\ _2^2$	0	$2,6910^{-8}$	$2,4510^{-8}$ ,

TAB. 6.1: Valeurs de la fonction coût du problème  $[P_1]$  et de la fonction coût du problème  $[P_1]'$  pour le taux d'éclosion estimé, erreur maximale entre les taux d'éclosion exacts et approchés et erreur maximale entre les dynamiques d'éclosion expérimentales et approchées.

La distribution gaussienne dans le temps des éclosions est décrite dans le modèle *Lobesia botrana* par une loi gaussienne dont la moyenne et la variance dépendent de la distribution en âge de la population oeufs initiale. On s'intéresse dans la section suivante à déterminer le taux d'éclosion pour une dynamique d'éclosion dans le temps des jeunes larves non gaussienne.

## 6.5 Estimation du taux d'éclosion pour une dynamique d'éclosion expérimentale.

On souhaite estimer le taux d'éclosion de notre modèle mathématique à partir d'une dynamique d'éclosion mesurée expérimentalement mais différente d'une fonction gaussienne.

Généralement, les mesures sur le temps de développement des oeufs sont faites tous les jours et parfois plusieurs fois par jour. Afin d'utiliser ces données dans l'algorithme de minimisation, on ajuste ces mesures quotidiennes sur un pas de temps de 2h40. On propose de répartir les éclosions de la journée sur un pas de temps de 2h40 selon deux approches. Dans la première, on suppose que la probabilité d'éclore est la même quelque soit l'heure de la journée. Par conséquent, la dynamique temporelle d'éclosion résultante est une fonction du temps constante par morceaux. La deuxième solution est de concentrer les éclosions sur une période précise de la journée, par exemple vers midi. La dynamique d'éclosion ressemble dans ce cas à la succession de pics gaussiens. On détermine, en résolvant le problème de minimisation  $[P_1]$ , le taux d'éclosion pour ces deux dynamiques expérimentales.

A partir du modèle (6.1) et de l'équation (6.2), on se construit ces deux dynamiques d'éclosion

expérimentales. Pour cela, le taux d'éclosion exacte  $\beta_{ex}^e$  est défini par

$$\beta_{ex}(a = 6) = 0.57, \quad \beta_{ex}(a = 7) = 0.4, \quad \beta_{ex}(a = 8) = 0.03,$$

et la donnée initiale  $u_0^e$  est soit une fonction gaussienne, une fonction constante par morceaux ou une somme de fonctions Diracs. On présente deux résultats pour l'estimation du taux d'éclosion avec une dynamique en temps égale à une somme de fonctions gaussiennes et 1 résultat pour l'identification du taux d'éclosion à partir d'une donnée en temps constante par morceaux.

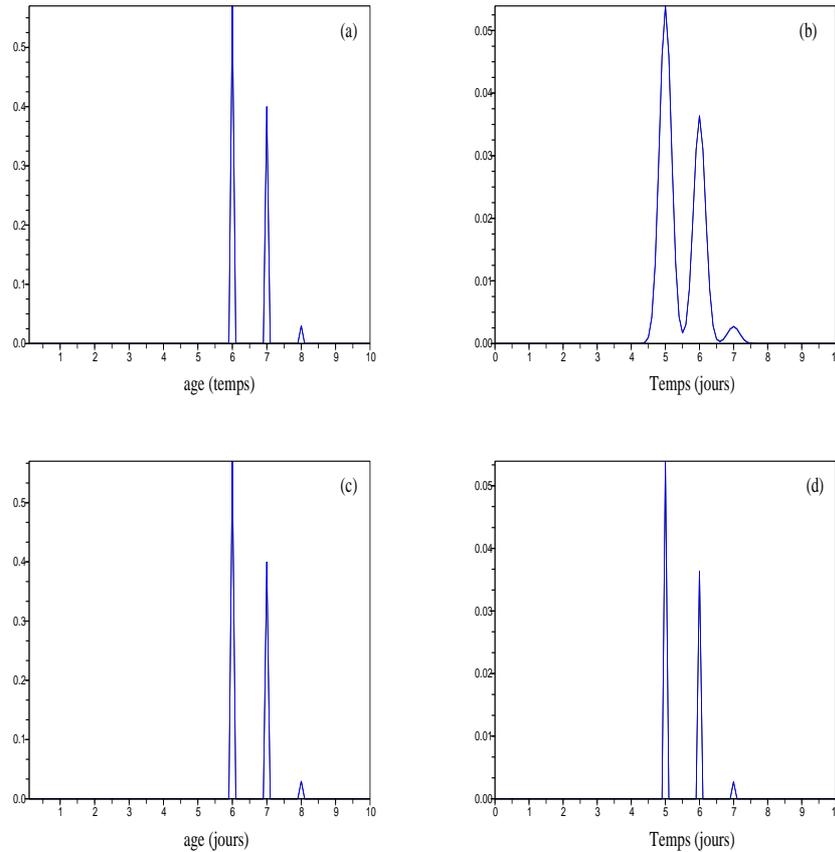


FIG. 6.5: (a), (c) : Taux d'éclosion en fonction de l'âge. La courbe noire représente le taux exacte et la courbe bleue est le taux d'éclosion estimé par l'algorithme de (QN). (a) : La donnée initiale est une fonction gaussienne centrée en 1 et de largeur 0,25. (c) : La donnée initiale est une fonction Dirac en l'âge 1. (b) et (d) : Dynamique d'éclosion en fonction du temps. La courbe noire et la courbe bleue sont obtenues en calculant l'équation (6.2) avec respectivement le taux exacte et le taux estimé.

### Les éclosions sont concentrées à un moment précis de la journée.

La courbe noire du graphe (b) de la figure 6.5 est la dynamique temporelle d'éclosion obtenue avec une donnée initiale gaussienne centrée en l'âge 1 et de largeur 0,25. La solution du problème d'estimation pour cette dynamique expérimentale et cette donnée initiale est tracée sur le graphe (a) de la figure 6.5. Cette solution se confond avec le taux d'éclosion exacte. Le problème d'estimation  $[P_1]$  admet pour ces conditions une unique solution.

La courbe noire du graphe (d) de la figure 6.5 est la dynamique temporelle d'éclosion obtenue avec une cohorte oeufs tous âgés d'un jour. Le taux d'éclosion estimé pour cette dynamique expérimentale et cette donnée initiale se superpose à la solution exacte (graphe (c) de la figure 6.5). Le problème d'estimation  $[P_1]$  admet une unique solution lorsque  $q_{exp}$  est une somme de fonctions Diracs.

### Les éclosions sont constantes sur la journée.

La dynamique d'éclosion représentée sur le graphe (b) de la figure 6.6 est obtenue avec une cohorte oeufs tous âgés d'un jour. Le taux d'éclosion calculé par l'algorithme de Quasi-Newton pour le problème de minimisation  $[P_1]$  avec cette courbe expérimentale est donné sur le graphe (a) de 6.6. Ce taux d'éclosion est unique pour ces fonctions  $q_{exp}$  et  $u_0^e$ .

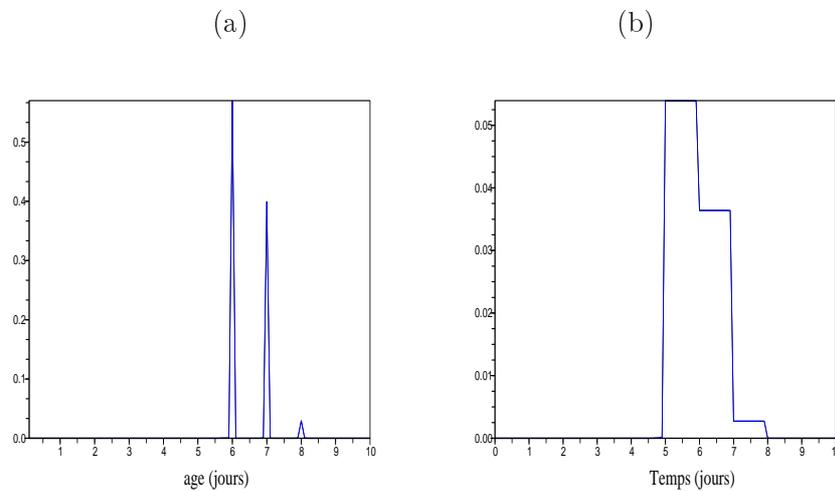


FIG. 6.6: (a) : Taux d'éclosion en fonction de l'âge. La courbe noire représente le taux exacte et la courbe bleue est le taux d'éclosion estimé par l'algorithme de (QN). (b) : Dynamique d'éclosion en fonction du temps. La courbe noire et la courbe bleue sont obtenues en calculant l'équation (6.2) avec respectivement le taux exacte et le taux estimé.

En fonction de la distribution en âge de la population oeuf prise à l'instant initial, le modèle (6.1) reproduit exactement les dynamiques d'éclosion mesurées expérimentalement. Le taux d'éclosion est égal à une somme de fonction Dirac c'est à dire qu'il décrit précisément l'âge de passage entre la fin du stade oeuf et le début du stade L1.

## 6.6 Application aux données expérimentales.

On recherche le taux d'éclosion du modèle *Lobesia botrana* pour simuler la dynamique d'éclosion mesurée par Auroy en 2006 sur une population oeuf venant de l'élevage de l'INRA Villenave d'Ornon. Le détail de son expérience est précisé sur son rapport de stage (Auroy, 2006). Les expérimentations avaient pour but de déterminer l'effet de la température et de l'humidité sur trois traits de vie de l'insecte à savoir la mortalité de l'oeuf, leur temps d'incubation ainsi que leur taux d'éclosion.

Sous des conditions thermiques constantes de 20°C et hygrométriques de 60% r.h., le temps moyen de développement d'une cohorte d'oeufs est de 6 jours. La dynamique de cette population dure 3 jours, c'est à dire du 6ème au 8ème jour après la naissance des oeufs. Auroy mesure

57% des oeufs qui se développent à la vitesse moyenne de 6 jours, 40 % des oeufs mettent 7 jours à éclore et enfin 1% des oeufs éclosent au bout de 8 jours. On détermine le taux d'éclosion satisfaisant ces observations en résolvant le problème  $[P_1]$ . Pour cela, on ajuste ces données faites quotidiennement sur un pas de temps de 2h40, qui est l'échelle temporelle utilisée dans l'algorithme de résolution. Le taux d'éclosion est estimé pour deux dynamiques d'éclosion données en fonction du temps. La première dynamique d'éclosion correspond à une fonction constante par morceaux, c'est à dire que la probabilité d'éclore est la même quelque soit l'heure de la journée. La deuxième dynamique d'éclosion est une somme de fonctions Diracs modélisant l'éclosion des oeufs sur une période précise de la journée.

### Les éclosions sont constantes sur la journée.

La solution tracée sur le graphe (a) de la figure 6.7 a été régularisée par sa norme minimale et sa norme minimale de sa dérivée première. La dynamique d'éclosion calculée à partir de l'équation (6.2) et du modèle (6.1) pour ce taux estimé est donnée en bleu sur le graphe (b) de cette figure.

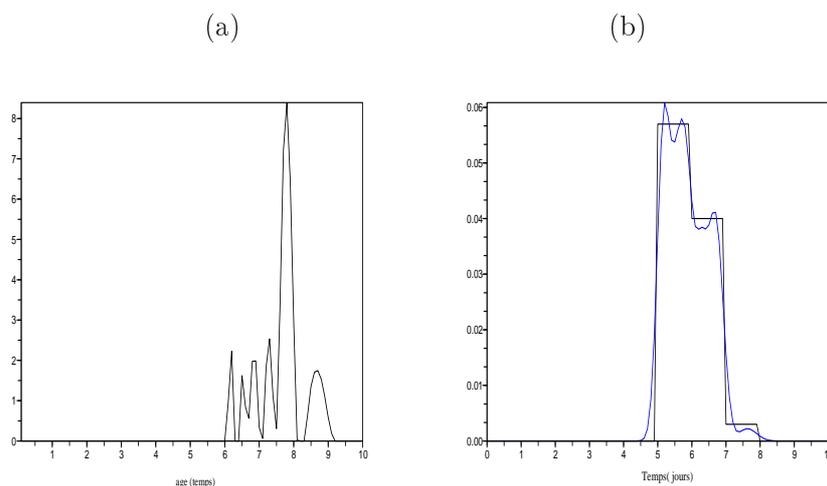


FIG. 6.7: (a) taux d'éclosion estimé par l'algorithme de Quasi-Newton en fonction de l'âge. (b) : Dynamique d'éclosion en fonction du temps. La courbe noire est la donnée expérimentale et la courbe bleue est obtenue en calculant l'équation (6.2) avec le taux estimé.

L'erreur entre les courbes exactes et expérimentales est faible comparé à l'erreur du schéma numérique. Le modèle mathématique décrit alors correctement avec le taux d'éclosion estimé cette dynamique expérimentale en forme d'escalier. L'âge d'éclosion de cette population est compris dans l'intervalle  $[6,9]$  jours. La différence maximale d'âge d'éclosion pour cette cohorte d'oeufs est de 3 jours. Une majorité d'oeufs éclosent vers le 8ème jour après leur naissance.

Les éclosions sont concentrées à un moment précis de la journée.

Le taux d'éclosion dessiné sur le graphe (a) de la figure 6.8 est la solution du problème d'estimation sans conditions particulières sur sa régularité. Sur le second graphe, (b), sont représentées les dynamiques d'éclosion expérimentales (courbe noire) et simulées par le modèle mathématique avec le taux estimé (courbe bleue).

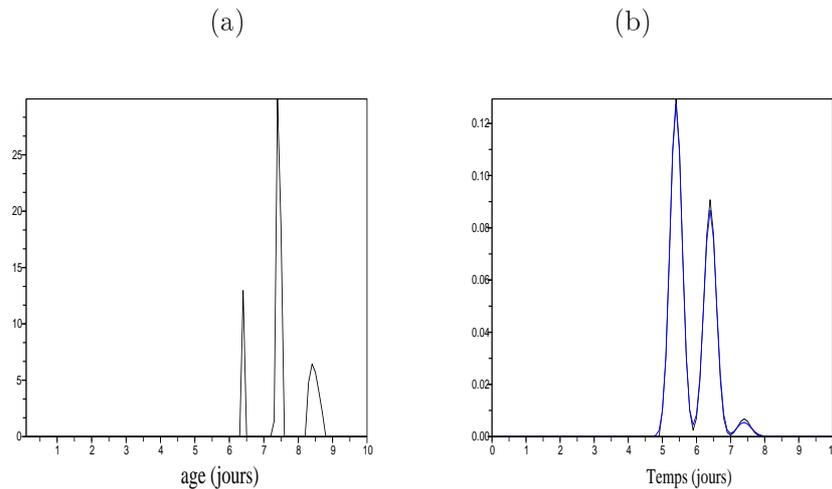


FIG. 6.8: (a) Taux d'éclosion estimé par l'algorithme de Quasi-Newton en fonction de l'âge. (b) : Dynamiques d'éclosion en fonction du temps. La courbe noire est la donnée expérimentale et la courbe bleue est obtenue en calculant l'équation (6.2) avec le taux estimé.

Les courbes du graphe (b) se confondent, le modèle mathématique décrit alors parfaitement avec le taux d'éclosion estimé cette dynamique expérimentale égale à une somme de pics gaussiens. Le taux identifié est égal à la somme de fonctions Diracs. Les individus de cette cohorte d'oeufs éclosent vers l'âge 6,5 jours, 7,5 jours et 8,5 jours approximativement. La différence maximale d'âge d'éclosion pour cette cohorte d'oeufs est de 3 jours. Cependant, un nombre important d'oeufs éclosent vers le 8ème jour après leur naissance.

Dans le paragraphe 6.5, on a montré que l'estimation du taux d'éclosion à partir d'une dynamique d'éclosion égale à une somme de pics gaussiens et d'une cohorte oeuf d'âge moyen d'un jour est unique. Par conséquent, le taux d'éclosion de la figure 6.8 est l'unique taux de passage de cette population oeuf en chenille en fonction de l'âge. Ce taux sera alors utilisé pour l'étude de la dynamique des populations d'Eudémis réalisée dans la troisième partie de cette thèse.

## 6.7 Modification du problème d'estimation.

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'estimation du taux d'éclosion à partir de données expérimentales mesurant la distribution en âge de la population à un instant donné. Une distribution (pyramide) en âge de la population larvaire permet de mesurer le temps de développement de cette population. Sur le terrain, cela consiste à prélever 100 grappes de raisins au hasard et au même moment puis de compter le nombre de larves présentes. La largeur de la capsule céphalique nous informe sur l'âge de la chenille. L'enjeu de ce paragraphe est déterminer le taux de passage du stade oeuf au stade larve en fonction de l'âge à partir de cette observation.

On note l'observation  $\psi(a)$  où  $a$  est dans l'intervalle  $[0, L^l]$  et  $L^l$  est l'âge maximal des chenilles. La mesure de cette donnée est réalisée à l'instant  $T_{obs}$ . Les équations modélisant le développement

de la population oeuf jusqu'à la fin du stade larve sont

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u^e(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} u^e(t, a) = -\beta^e(a) u^e(t, a), & a \in [0, L^e], \\ \frac{\partial}{\partial t} u^l(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} u^l(t, a) = -\beta^l(a) u^l(t, a), & a \in [0, L^l], \\ u^l(t, 0) = \int_0^L \beta^e(a) u^e(t, a) da \\ u^e(t, 0) = 0, \\ u^e(0, a) = u_0^e(a), & a \in [0, L^e], \\ u^l(0, a) = 0, & a \in [0, L^l]. \end{cases} \quad (6.18)$$

où  $u^e$  et  $u^l$  sont respectivement les densités des populations oeufs et larves et la variable  $t$  est défini dans  $[0, T_{obs}]$ . La mesure expérimentale correspond alors à la valeur de la densité larve à l'instant  $T_{obs}$

$$u^l(T_{obs}, a) = \psi(a), \quad a \in [0, L^l], \quad (6.19)$$

et  $T_{obs}$  est compris dans l'intervalle  $]L^e, L^e + L^l]$ .

### Unicité du taux d'éclosion.

Le calcul de la densité larve à l'instant  $T_{obs}$  à partir du modèle (6.18) est possible à condition de connaître les fonctions d'éclosion, d'émergence et initiale. Supposons que cette distribution de la population est donnée par des mesures expérimentales par exemple et que le taux d'émergence et la donnée initiale sont connus, peut on déterminer le taux d'éclosion à partir du système (6.18) et de l'équation (6.19). Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'existence unique de solution pour ce problème inverse. On suppose que les fonctions connues satisfont les hypothèses (H1)-(H6).

**Théorème 7** *Soit  $\psi(a)$  une donnée expérimentale sur la distribution en âge de la population larve à un instant donné. Cette mesure permet de reconstruire uniquement le taux d'éclosion à partir du modèle de croissance défini en (6.18).*

**preuve :** Raisonnons par l'absurde. Soient  $(u^e, u^l, \beta)$  et  $(v^e, v^l, \lambda)$  deux solution au problème inverse i.e.

$$\psi(a) = u^l(T_{obs}, a) = v^l(T_{obs}, a), \quad a \in [0, L^l].$$

On pose  $\bar{u} = u^e - v^e$ ,  $\bar{v} = u^l - v^l$  et  $\bar{\beta} = \beta - \lambda$  et  $L$  l'âge maximal des deux stades de développement. Les densités  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  vérifient les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} \bar{u}(t, a) + \beta(a) \bar{u}(t, a) = -v^e(t, a) \bar{\beta}(a), & a \in [0, L^e], \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} \bar{v}(t, a) + \beta^l(a) \bar{v}(t, a) = 0, & a \in [0, L^l], \end{cases} \quad (6.20)$$

pour  $t \in [0, T_{obs}]$  avec comme conditions aux bords

$$\begin{cases} \bar{u}(t, 0) = 0 \\ \bar{v}(t, 0) = \int_0^{L^e} \beta(a) u^e(t, a) da - \int_0^{L^e} \lambda(a) v^e(t, a) da, \\ \bar{u}(0, a) = 0, & a \in [0, L^e], \\ \bar{v}(0, a) = 0, & a \in [0, L^l], \end{cases} \quad (6.21)$$

et  $\bar{v}(T_{obs}, a) = 0$ . Soient  $\xi^e$  et  $\xi^l$ , deux variables définies sur  $[0, L^k] \times [0, T_{obs}]$ , où  $k = e, l$ , satisfaisant le problème adjoint du système (6.18)-(6.19)

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} \xi^e(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} \xi^e(t, a) + \beta(a) \xi^e(t, a) = \xi^l(t, 0) \beta(a), & a \in [0, L^e], \\ -\frac{\partial}{\partial t} \xi^l(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} \xi^l(t, a) + \beta^l(a) \xi^l(t, a) = 0, & a \in [0, L^l], \end{cases} \quad (6.22)$$

et les conditions limites suivantes

$$\begin{cases} \xi^e(t, L^e) = 0, \\ \xi^e(T_{obs}, a) = 0, \quad a \in [0, L^e], \\ \xi^l(t, L^l) = 0, \\ \xi^l(T_{obs}, a) = \theta(a), \quad a \in [0, L^l]. \end{cases} \quad (6.23)$$

On multiplie la première équation de (6.20) par  $\xi^e$  puis on l'intègre sur le domaine  $[0, T_{obs}] \times [0, L^e]$ . De même, on multiplie la deuxième par  $\xi^l$  puis on l'intègre sur le domaine  $[0, T_{obs}] \times [0, L^l]$ . Après simplifications, on a

$$\begin{cases} \int_0^{T_{obs}} \int_0^{L^e} \xi^l(t, 0) \beta(a) \bar{u}(t, a) da dt = - \int_0^{T_{obs}} \int_0^{L^e} v^e \bar{\beta}(a) \xi^e(t, a) da dt, \\ \int_0^{T_{obs}} \xi^l(t, 0) \bar{v}(t, 0) da dt = 0. \end{cases} \quad (6.24)$$

A partir de la définition de la densité  $\bar{v}$  à l'âge 0 donné dans (6.21), la deuxième équation de ce système s'écrit

$$\int_0^{T_{obs}} \xi^l(t, 0) \bar{v}(t, 0) da dt = \int_0^{T_{obs}} \xi^l(t, 0) \left[ \int_0^{L^e} \beta(a) \bar{u}(t, a) da + \bar{\beta}(a) v^e(t, a) da \right] dt = 0.$$

On utilise cette dernière équation pour réécrire la première équation de (6.24) de la manière suivante

$$\int_0^{T_{obs}} \xi^l(t, 0) \left[ \bar{v}(t, 0) - \int_0^{L^e} \bar{\beta}(a) v^e(t, a) da \right] dt = - \int_0^{T_{obs}} \int_0^{L^e} v^e \bar{\beta}(a) \xi^e(t, a) da dt.$$

On déduit alors que

$$\int_0^{T_{obs}} \int_0^{L^e} v^e(t, a) \bar{\beta}(a) \left( \xi^e(t, a) - \xi^l(t, 0) \right) da dt = 0. \quad (6.25)$$

Les solutions du problème dual sont obtenues en résolvant le système (6.22)-(6.23) par la méthode des caractéristiques et sont égales à

$$\begin{aligned} \xi^l(t, a) &= \theta(a - t + T_{obs}) e^{-\int_t^{T_{obs}} \beta^l(\tau) d\tau}, \quad a + T_{obs} > t \\ \xi^e(t, a) &= \int_t^{T_{obs}} e^{-\int_t^s \beta(\tau) d\tau} \beta(a) \theta(T - s) e^{-\int_s^{T_{obs}} \beta^l(\tau) d\tau} ds, \quad a + T_{obs} > t \end{aligned}$$

Ces solutions sont injectées dans l'équation (6.25) puis en jouant sur les variables d'intégration, on fait apparaître l'équation suivante

$$\begin{aligned} \int_0^{T_{obs}} \theta(T_{obs} - t) e^{-\int_t^{T_{obs}} \beta^l(\tau) d\tau} \left[ \int_0^{L^e} \bar{\beta}(a) \beta(a) \int_0^{T_{obs}} v^e(s, a) e^{-\int_0^s \beta(\tau) d\tau} ds da \right] dt \\ - \int_0^{T_{obs}} \theta(T_{obs} - t) e^{-\int_t^{T_{obs}} \beta^l(\tau) d\tau} \left[ \int_0^{L^e} \bar{\beta}(a) v^e(t, a) da \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

On pose  $\theta(t) = t^n$ , où  $n$  est strictement positif, ainsi pour tous  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0, T_{obs}]$  le terme nul de cette équation est

$$\int_0^{L^e} \bar{\beta}(a) \left[ \beta(a) \int_0^{T_{obs}} v^e(s, a) e^{-\int_0^s \beta(\tau) d\tau} ds - v^e(t, a) \right] da = 0, \quad (6.27)$$

où  $v^e(t, a)$  est égal, en résolvant le système (6.18), à

$$v^e(t, a) = \begin{cases} u_0^e(a-t)e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}, & a > t, \\ 0, & a \leq t. \end{cases}$$

Cette fonction est définie non nulle pour tous  $t$  compris dans l'intervalle  $[0, L^e]$  et pour  $a$  défini dans  $[t, L^e]$ . Par conséquent, seules les fonctions  $\beta$  et  $\bar{\beta}$  sont nulles sur tout le domaine  $[0, L^e]$ . En effet, si  $\beta$  est nulle alors il reste de l'équation (6.27) le terme

$$\int_0^{L^e} \bar{\beta}(a)v^e(t, a)da = 0, \quad (6.28)$$

et par conséquent  $\bar{\beta}$  est nulle pour tous  $a \in [0, L^e]$ , sinon  $\beta = \lambda$  pour tout  $a$  dans  $[0, L^e]$ .  $\square$

### 6.7.1 Formulation et résolution du problème d'estimation.

On détermine  $\beta^e$  en résolvant le problème de minimisation suivant

$$[P_1]'' = \begin{cases} \text{Min}_{\beta^e \in K} \int_0^{L^l} [u^l(T_{obs}, a) - \psi(a)]^2 da, \\ \text{où } u^l \text{ est donnée par (6.18)} \end{cases}$$

et  $K$  est le domaine des solutions admissibles donné par

$$K = \{\beta(a) \in L^\infty([0, L^e]); 0 < \underline{\beta} \leq \beta \leq \bar{\beta}\}.$$

**Théorème 8** *Le problème  $[P_1]''$  admet au moins un optimum.*

**Preuve :** Soit  $d$  la borne inférieure de la fonction coût telle que  $0 \leq d < +\infty$ . Soit  $\{\beta_n^e\}$ , où  $n$  est un entier non nul, une suite minimisante telle que

$$d < \mathcal{J}(\beta_n^e) \leq d + \frac{1}{n}, \quad (6.29)$$

où la valeur de la fonction coût pour cette solution est donnée par

$$\mathcal{J}(\beta_n^e) = \int_0^{L^l} [u_n^l(T_{obs}, a) - \psi(a)]^2 da.$$

La suite  $\{\beta_n^e\}$  appartient à l'espace  $K$ , par conséquent il existe une sous suite  $\{\beta_{n_k}^e\}_k$  de  $\{\beta_n^e\}_n$  qui converge faiblement vers  $\beta_*^e$  dans l'espace  $L^2([0, L^e])$ . La densité  $u^l$  est dépendante de la suite  $\{\beta_{n_k}^e\}_k$ , on la note  $\{u_{n_k}^e\}_k$  et est donnée par

$$u_{n_k}^l(T_{obs}, a) = \begin{cases} 0, & a > T_{obs}, \\ e^{-\int_{a-t}^a \beta^l(s)ds} \int_{a-T_{obs}}^{L^e} \beta_{n_k}^e(s)u_0^e(s-a+T_{obs})ds, & a \leq T_{obs}. \end{cases}$$

Cette suite est bornée dans l'espace  $L^2([0, L^l])$ . La fonction  $u_0^e$  est bornée dans  $L^2([0, L^e])$ , on déduit alors

$$\int_{a-T_{obs}}^{L^e} \beta_{n_k}^e(s)u_0^e(s-a+T_{obs})ds \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{a-T_{obs}}^{L^e} \beta_*^e(s)u_0^e(s-a+T_{obs})ds,$$

car  $\beta_{n_k}^e$  converge faiblement vers  $\beta^*$  dans l'espace  $L^2([0, L^e])$ . La limite de la suite  $\{u_{n_k}^l\}_k$  est donc égale à

$$u_*^l(T_{obs}, a) = \begin{cases} 0, & a > T_{obs}, \\ e^{-\int_{a-t}^a \beta^l(s) ds} \int_{a-T_{obs}}^{L^e} \beta_*^e(s) u_0^e(s-a+T_{obs}) ds, & a \leq T_{obs}. \end{cases}$$

Finalement, la fonction coût au point  $\beta_{n_k}^e$  converge vers

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\beta_{n_k}^e) &= \int_0^{L^l} \left[ u_{n_k}^l(T_{obs}, a) - \psi(a) \right]^2 da \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^{L^l} \left[ u_*^l(T_{obs}, a) - \psi(a) \right]^2 da = \mathcal{J}(\beta_*^e), \end{aligned}$$

et  $\mathcal{J}(\beta_*^e) = d$  avec (6.29).  $\square$

On a deux manières de résoudre le problème  $[P_1]''$ , soit on remplace la densité larve par son expression pour faire apparaître le taux d'éclosion, puis on étudie directement la fonction coût. Soit, on formule le Lagrangien comme dans l'étude des précédents problèmes de minimisation. On choisit la deuxième méthode car la plupart des calculs ont déjà été explicités dans les paragraphes précédents.

Soient  $p, q$  et  $h$  les variables Lagrangiennes et  $S$  le vecteur égal à  $(u^e, u^l, \beta^e, p, q, h)$ . Le Lagrangien est,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S) &= \mathcal{J}(\beta^e) + \int_0^{T_{obs}} \int_0^{L^e} [\partial_t u^e + \partial_a u^e + \beta^e(a) u^e] p(t, a) da dt \\ &\quad + \int_0^{T_{obs}} \int_0^{L^l} [\partial_t u^l + \partial_a u^l + \beta^l(a) u^l] q(t, a) da dt \\ &\quad + \int_0^{T_{obs}} \left[ u^l(t, 0) - \int_0^{L^e} \beta^e(s) u^e(t, s) ds \right] h(t) dt. \end{aligned}$$

La fonction  $S^*$  est un optimum de  $\mathcal{L}$  si

$$\nabla \mathcal{L}(S^*) = (\partial_{\beta^e} \mathcal{L}, \partial_p \mathcal{L}, \partial_q \mathcal{L}, \partial_{u^e} \mathcal{L}, \partial_{u^l} \mathcal{L})(S^*) = 0.$$

La dérivée du Lagrangien par rapport aux variables  $p$  et  $q$  au point  $S^*$  donnent les deux premières équations de (6.18). La dérivée du Lagrangien par rapport à  $h$  donne la condition aux limites  $u^l(t, 0)$ .

La première équation du système adjoint s'obtient en calculant la dérivée du Lagrangien par rapport à  $u^e$

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} p^*(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} p^*(t, a) + \beta^{e,*}(a) p^*(t, a) = h^*(t) \beta^{e,*}(a), & a \in [0, L^e] \\ p^*(T_{obs}, a) = 0, & a \in [0, L^e] \\ p^*(t, L^e) = 0, \end{cases} \quad (6.30)$$

pour  $t$  défini dans l'intervalle  $[0, T_{obs}]$ . La deuxième équation du problème adjoint est donnée, en dérivant le Lagrangien par rapport à  $u^l$ , par

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} q^*(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} q^*(t, a) + \beta^{l,*}(a) q^*(t, a) = 0, & a \in [0, L^l] \\ q^*(t, 0) = h^*(t), \\ q^*(T_{obs}, a) = 2 [\psi(a) - u^l(T_{obs}, a)], & a \in [0, L^l] \\ q^*(t, L^l) = 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

pour  $t$  défini dans l'intervalle  $[0, T_{obs}]$ . Ces deux équations sont liées par la fonction  $h(t)$ . La fonction  $p^*$  pour tous  $t$  et  $a$  est définie à condition que la fonction  $q^*$  est définie pour tous  $t$  et en l'âge 0.

Par la méthode des caractéristiques, le système (6.31) admet une solution explicite qui est donnée par

$$\begin{aligned} q^*(t, a) &= q(T_{obs}, a) e^{\int_{T_{obs}}^t \beta^{l,*}(\tau) d\tau}, \\ &= 2 \left[ \psi(a - t + T_{obs}) - u^l(T_{obs}, a - t + T_{obs}) \right] e^{-\int_t^{T_{obs}} \beta^{l,*}(\tau) d\tau}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Cette intégrale est bien définie sur tout le domaine en âge et en temps. La solution du système (6.30) est égale à

$$p^*(t, a) = \int_t^{T_{obs}} e^{-\int_a^s \beta^{e,*}(\tau) d\tau} \beta^{e,*}(a) q^*(s, 0) ds. \quad (6.33)$$

Ces solutions vont servir au calcul de l'inconnu  $\beta^{e,*}$ . Soit  $l$  une fonction de l'espace  $L^2([0, L^e])$  nulle sur les bords du domaine en âge,

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta^e}, l \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle u^e p - h(t) u^e, l \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

La fonction  $S^*$  est un optimum si et seulement si  $\nabla \mathcal{L}(S^*) = 0$ , c'est à dire si

$$u^{e,*}(t, a) p^*(t, a) - q^*(t, 0) u^{e,*}(t, a) = 0,$$

où  $p^*, q^*$  sont donnés par les équations (6.32) et (6.33) et  $(u^{e,*}, u^{l,*})$  sont donnés en résolvant le système (6.18).

### 6.7.2 Le problème discret.

On étudie le problème discret de  $[P_1]''$  pour obtenir une solution numérique. On considère le maillage défini dans le paragraphe (6.3) de ce chapitre. La discrétisation de la fonction coût sur ce maillage est

$$\mathcal{J}_\Delta(\beta_\Delta^e) = \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \left[ u_i^{l, N_t} - \psi_i \right]^2,$$

où le vecteur  $u_i^{l, N_t}$  pour  $i$  allant de 1 à  $N_a$  est donné par

$$\begin{aligned} u_i^{e, n+1} &= \frac{u_i^{e, n} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e, n}}{1 + \Delta t \beta_i^e}, \quad i = 1, N_a, \quad n = 0, N_t - 1, \\ u_i^{l, n+1} &= \frac{u_i^{l, n} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{l, n}}{1 + \Delta t \beta_i^l}, \quad i = 1, N_a, \quad n = 0, N_t - 1, \\ u_i^{e, 0} &= \phi_i, \quad i = 0, N_a, \\ u_0^{l, n} &= \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^e u_i^{e, n} \quad n = 0, N_t, \\ u_0^{e, n} &= 0, \quad n = 0, N_t, \\ u_i^{l, 0} &= 0, \quad i = 0, N_a. \end{aligned} \quad (6.34)$$

On cherche le contrôle  $\beta_\Delta^e$  dans l'espace des solutions  $K_\Delta$  donné par

$$K_\Delta = \{\beta_\Delta(a) = \beta_i, \quad 0 \leq \beta_i \leq \bar{\beta}, \quad \forall i = 1, N_a\}$$

qui est l'approximation de l'espace des fonctions  $K$ . La solution doit satisfaire le problème de minimisation suivant

$$[P_1]''_\Delta \begin{cases} J_\Delta(\beta_\Delta^e) = \text{Min}_{(g_\Delta^e) \in K_\Delta} J_\Delta(g_\Delta^e) \\ \text{où } u_\Delta^l \text{ vérifie (6.34)} \end{cases}$$

L'étude de ce problème s'organise de la manière suivante : on montre d'abord que le problème est bien posé puis on montre que la fonction coût possède les bonnes propriétés pour une recherche numérique de l'optimum par une méthode de Quasi-Newton.

**Théorème 9**  $[P_1]''_\Delta$  admet au moins une solution.

**Preuve :** La démonstration se fait de manière analogue à la preuve du théorème (2) de ce chapitre.

Pour caractériser la solution, on formule le Lagrangien. Soient  $p_i^n$  et  $q_i^n$ , pour  $i = 1, N_a$ ,  $n > 0$ , les variables duales. Le Lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Delta(S) = & \mathcal{J}_\Delta(\beta_\Delta^e) + \sum_{n=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_a} p_i^n \left( u_i^{e,n+1} - \frac{u_i^{e,n}(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e,n}}{1 + \Delta t \beta_i^e} \right) \\ & + \sum_{n=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_a} q_i^n \left( u_i^{l,n+1} - \frac{u_i^{l,n}(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{l,n}}{1 + \Delta t \beta_i^l} \right). \end{aligned}$$

La dérivée du Lagrangien par rapport à la variable d'état  $u_{i_0}^{e,n_0}$  pour  $i_0 = 1, N_a$  et  $n_0 = 0, N_t$  et à l'optimum  $S^*$  donne la relation pour le calcul des multiplicateurs de Lagrange

$$p_{i_0}^{n_0} = \frac{\Delta t}{\Delta a} \frac{p_{i_0+1}^{n_0+1}}{1 + \Delta t \beta_{i_0+1}^{e,*}} + p_{i_0}^{n_0+1} \frac{(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a})}{1 + \Delta t \beta_{i_0}^{e,*}},$$

pour  $i_0 = 1, N_a$  et  $n_0 = N_t - 1, 0$  avec  $p_i^{N_t} = f_i$ . La dérivée du Lagrangien par rapport à  $u_{i_0}^{l,n_0}$  pour  $i_0 = 1, N_a$  et  $n_0 = 0, N_t$  et au point  $S^*$  donne la relation pour le calcul des variables duales

$$q_{i_0}^{n_0} = \frac{\Delta t}{\Delta a} \frac{q_{i_0+1}^{n_0+1}}{1 + \Delta t \beta_{i_0+1}^{l,*}} + q_{i_0}^{n_0+1} \frac{(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a})}{1 + \Delta t \beta_{i_0}^{l,*}},$$

pour  $i_0 = 1, N_a$  et  $n_0 = N_t - 1, 0$ . Pour  $n_0 = N_t$

$$q_{i_0}^{N_t} = -2\Delta a \left[ u_{i_0}^{l,N_t} - \psi_{i_0} \right]^2$$

Soient  $(p, q)$  et  $(\tilde{p}, \tilde{q})$  les variables de Lagrange obtenues respectivement avec  $\beta^e$  et  $\tilde{\beta}^e$ . Les fonctions vérifient le lemme suivant

**Lemme 14** *Les variables duales sont uniformément bornées et continuent par rapport au contrôle  $\beta_\Delta^e$  i.e.*

$$\begin{aligned} |p_i^n| \leq N, \quad |q_i^n| \leq N, \quad i = 1, N_a \text{ et } n \geq 0 \text{ et} \\ \|p^n - \tilde{p}^n\|_\infty \leq c \|\beta^e - \tilde{\beta}^e\|_\infty, \quad n \geq 0 \\ \|q^n - \tilde{q}^n\|_\infty \leq k \|\beta^e - \tilde{\beta}^e\|_\infty, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

où  $N$ ,  $M$ ,  $c$  et  $k$  sont des constantes positives.

Ce lemme est utile pour prouver la convergence de l'algorithme de Quasi-Newton. Le gradient se calcule facilement et s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_i^e}(S) = \sum_{n=0}^{Nt-1} \Delta t p_{i-1}^n \frac{(u_i^{e,n}(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e,n})}{(1 + \Delta t \beta_i^e)^2}.$$

pour  $i = 1, N_a$ . On utilise ce vecteur dans l'algorithme de Quasi-Newton. Comme la fonction Lagrangienne possède les bonnes propriétés, on sait que cette méthode converge.

### 6.7.3 Résultats numériques.

On résout le problème d'estimation du taux d'éclosion  $[P_1]''$  avec les routines d'optimisation de la librairie IMSL. La méthode Quasi-Newton est implémentée dans la routine BCONG. En résolvant le problème d'évolution (6.18), on se construit la donnée expérimentale  $\psi$  à partir des fonctions suivantes :

$$\beta_{ex}^e(a) = e^{-\left(\frac{a-7}{0.5}\right)^2}, \quad a \in [0, L^e], \beta_{ex}^l(a) = e^{-\left(\frac{a-30}{0.25}\right)^2}, \quad a \in [0, L^l], \quad u_0^e(a) = e^{-\left(\frac{a-1}{0.25}\right)^2}, \quad a \in [0, L^e]$$

où  $\beta_{ex}^e$  et  $\beta_{ex}^l$  sont respectivement le taux d'éclosion et le taux d'émergence exactes. L'âge maximal de vie des oeufs est 10 et celui des larves est 36. La population initiale est une cohorte d'oeufs d'âge moyen d'un jour. On suppose qu'une pyramide des âges est mesurée au stade larvaire sur cette population au 16ème jour après leur naissance. Cette donnée est représentée sur le graphe (b) de la figure 6.9. C'est une gaussienne centrée en l'âge 10 et de largeur 0,25 environ. On cherche à partir de cette donnée expérimentale la solution  $\beta_{app}^e$  du problème  $[P_1]''$ . Le problème admet un optimum dès que  $\mathcal{J}_\Delta(\beta_{app}^e) = 0$ .

On présente deux résultats dont le premier est la solution de  $[P_1]''$  obtenue avec l'observation construite. Le deuxième est la solution du problème d'optimisation avec la fonction coût suivante

$$\mathcal{F}(\beta^e) = \mathcal{J}(\beta^e) + \eta \|\beta^e\|_2^2$$

Dans ce deuxième calcul, on impose des conditions de régularité sur la solution recherchée. Le constante  $\eta$  est prise dans l'intervalle  $[0, 1[$ .

**Solution de  $[P_1]''$ .**

L'algorithme de QN trouve pour la donnée expérimentale du graphe (b) de la figure 6.9, le taux d'éclosion tracé en bleu sur le graphe (a) de cette figure. La distribution en âge de la cohorte oeuf au 16ème jour après leur naissance est simulée, par le modèle pour ce taux d'éclosion identifié, en bleu sur le graphe (b).

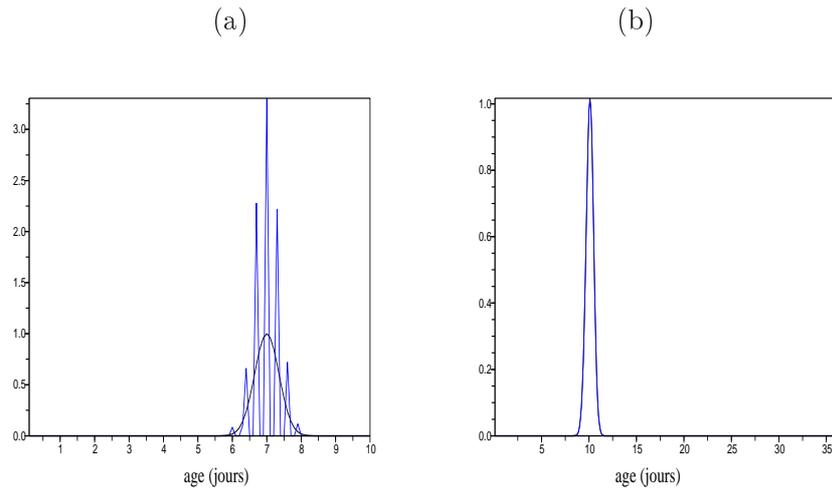


FIG. 6.9: (a) Taux d'éclosion en fonction de l'âge. La courbe noire est la valeur exacte et la courbe bleue est le taux estimé par l'algorithme de QN. (b) : Distribution de la population larvaire en fonction de l'âge à l'instant  $T_{obs}$ . Les courbes noire et bleue sont obtenues en résolvant le problème (6.18) avec respectivement le taux exacte et le taux estimé.

Cette solution est oscillante sur le domaine en âge  $[6,8]$  et est nulle en dehors de cet intervalle. La distribution en âge calculée avec ce taux estimé est superposée à la donnée expérimentale. Bien que le support des fonctions  $\beta_{ex}^e$  et  $\beta_{app}^e$  est identique, ces fonctions ne se confondent pas. Par conséquent, le problème  $[P_1]''$  n'admet pas une unique solution.

**Solution de  $[P_1]''$  avec régularisation de la solution.**

L'algorithme de QN trouve pour la donnée expérimentale du graphe (b) de la figure 6.10, le taux d'éclosion tracé en bleu sur le graphe (a) de cette figure. La distribution en âge de la cohorte oeuf au 16ème jour après leur naissance et associée à cette solution est simulée en bleu sur le graphe (b).

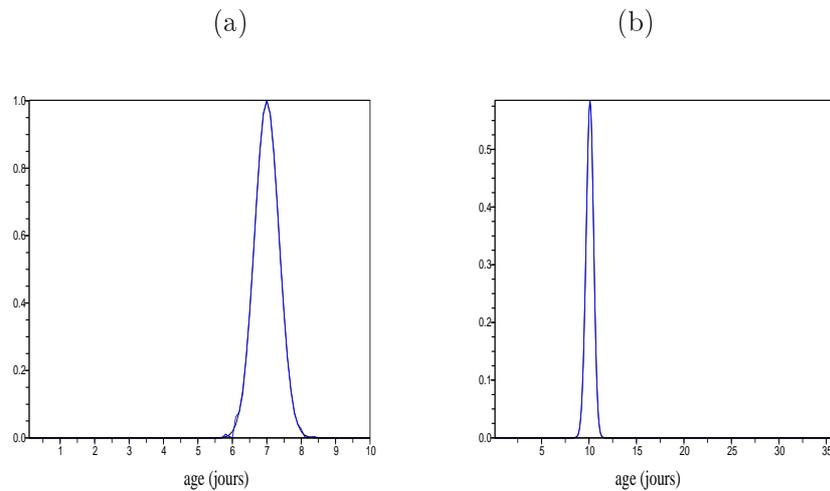


FIG. 6.10: (a) Taux d'éclosion en fonction de l'âge. La courbe noire est la valeur exacte et la courbe bleue est le taux estimé par l'algorithme de QN. (b) : Distribution de la population larvaire en fonction de l'âge à l'instant  $T_{obs}$ . Les courbes noire et bleue sont obtenues en résolvant le problème (6.18) avec respectivement le taux exacte et le taux estimé.

La solution estimée se confond avec la fonction exacte, le problème  $[P_1]''$  admet dans ce cas un unique optimum.

Figure	6.9	6.10
$\eta$	0	$0,110^{-3}$
$\mathcal{J}(\beta_{app}^e)$	$3,210^{-5}$	$3,8510^{-8}$
$\mathcal{F}(\beta_{app}^e)$	0	$6,2710^{-5}$
$\ u_{ex}^t(T_{obs}) - u_{app}^t(T_{obs})\ _\infty$	$6,810^{-3}$	$210^{-4}$
$\ \beta_{app}^e - \beta_{ex}^e\ _\infty$	2,3	$3,810^{-2}$
$\eta \ \beta_{app}\ _2^2$	0	$6,2610^{-5}$

TAB. 6.2: Valeur de la fonction pour le taux estimé, erreur maximale entre les distributions en âge des larves à l'instant  $T_{obs}$  calculées avec les taux d'éclosion exactes et approchés, erreur maximale entre les taux d'éclosion exactes et approchés pour les solutions des figures 6.9 et 6.10.

Le modèle (6.18) décrit à partir d'un taux d'éclosion gaussien la distribution en âge des larves pour une cohorte d'oeufs d'âge moyen d'un jour.

## Chapitre 7

# Estimation du taux d'émergence

On estime à partir de données expérimentales le taux d'émergence d'une population Eudémis en fonction de l'âge. Pour cela, on utilise des données expérimentales relatives à la dynamique d'émergence c'est à dire mesurant le temps de développement d'une population larvaire. Ces expériences démarrent avec des oeufs de même âge et se terminent lorsque tous les individus sont transformés en papillons. On connaît alors la date d'apparition de chaque adulte, leur sexe, la durée de la dynamique de vol et le développement moyen d'un oeuf pour devenir un adulte. Ces expériences sont réalisées en conditions contrôlées, soit une hygrométrie de 60% et une température moyenne de 20°C.

Ces informations nous permettent de formuler le problème d'évolution associé à la croissance d'une population d'oeufs jusqu'au stade larvaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u^e}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^e}{\partial a}(t, a) = -\beta^e(a)u^e(t, a), & a \in [0, L^e], \quad t \in [0, T], \\ \frac{\partial u^l}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^l}{\partial a}(t, a) = -\beta^l(a)u^l(t, a), & a \in [0, L^l], \quad t \in [0, T], \\ u^e(0, a) = u_0^e(a), & a \in [0, L^e], \\ u^l(0, a) = 0, & a \in [0, L^l], \\ u^e(t, 0) = 0, & t \in [0, T], \\ u^l(t, 0) = \int_0^{L^e} \beta^e(s)u^e(t, s)ds, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (7.1)$$

où  $u^e$  est la densité d'individus oeufs,  $u^l$  la densité d'individus larves,  $L^e$  l'âge maximal de vie d'un oeuf,  $L^l$  l'âge maximal de vie d'une larve et  $T$  le temps final de l'expérience. On néglige le taux de mortalité dans ces équations car le nombre d'individus décédant dans cette expérience est très faible. La relation décrivant la dynamique d'émergence est donnée par

$$q_{exp}(t) = \int_0^{L^l} \beta^l(a)u^l(t, a)da, \quad t \in [0, T], \quad (7.2)$$

où  $q_{exp}$  est la donnée expérimentale. La condition de renouvellement des oeufs est nulle car aucun oeuf n'est introduit au cours de l'expérience. Et les larves viennent uniquement de la transformation des oeufs.

**H 8** La fonction  $q_{exp}$  est bornée et non négative par rapport à la variable temps  $t$  donnée dans l'intervalle  $[0, T]$ .

### 7.1 Formulation du problème d'estimation.

L'objectif est d'identifier la fonction  $\beta^l$  satisfaisant l'équation (7.2). La fonction de densité des individus chenilles se calcule en temps et en âge en résolvant la deuxième équation du système

(7.1), et s'exprime en fonction du taux d'éclosion, de la donnée initiale de la densité oeuf et du taux d'émergence. On cherche alors le couple de fonctions  $(\beta^e, \beta^l)$  vérifiant l'équation (7.2) mais aussi le système (7.1). Nous cherchons un ensemble de fonctions  $(\beta^e, \beta^l, u^e, u^l)$  satisfaisant l'équation (7.2). Pour exactement déterminer les taux de passage d'un stade de développement à l'autre, nous formulons un problème de moindre carré qui consiste à minimiser l'erreur entre la dynamique d'émergence expérimentale et la dynamique d'émergence modélisée

$$[\mathbf{P}_2] = \begin{cases} \text{Min}_{(\beta^e, \beta^l) \in K^2} \int_0^T \left[ \int_0^{L^l} \beta^l u^l da - q_{exp}(t) \right]^2 dt, \\ \text{où } (u^e, u^l) \text{ sont les solutions de} \\ \begin{cases} \frac{\partial u^e(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial u^e(t,a)}{\partial a} = -\beta^e(a)u^e(t,a), & (t,a) \in \Omega^e, \\ \frac{\partial u^l(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial u^l(t,a)}{\partial a} = -\beta^l(a)u^l(t,a), & (t,a) \in \Omega^l, \\ u^e(0,a) = u_0^e(a), & a \in [0, L^e], \\ u^l(0,a) = 0, & a \in [0, L^l], \\ u^e(t,0) = 0, & t \in [0, T], \\ u^l(t,0) = \int_0^{L^e} \beta^e(s)u^e(t,s)ds, & t \in [0, T], \end{cases} \end{cases}$$

où  $\Omega^e$  est le domaine défini par  $[0, T] \times [0, L^e]$  et  $\Omega^l$  celui donné par  $[0, T] \times [0, L^l]$ . L'ensemble des solutions admissibles est défini par

$$K = \{\beta(a) \in L^\infty([0, L]); 0 < \underline{\beta} \leq \beta \leq \hat{\beta}\}.$$

On note la fonction coût  $\mathcal{J}(\beta^e, \beta^l)$ .

**Théorème 10** *Le problème  $[\mathbf{P}_2]$  admet au moins un optimum.*

**Preuve :** On utilise la méthode du théorème 1 sur l'existence d'un minimum au problème d'estimation du taux d'éclosion.

**Deux sous-problèmes.**

Considérons que l'on souhaite estimer seulement le taux d'éclosion  $\beta^e$  ou le taux de vol  $\beta^l$  à partir de données portant sur la dynamique d'émergence. Dans le premier cas, le problème d'optimisation est

$$[\mathbf{P}_2]' = \begin{cases} \text{Min}_{(\beta^e \in K)} \int_0^T \left[ \int_0^{L^l} \beta_{ex}^l(a)u^l(t,a)da - q_{exp}(t) \right]^2 dt, \\ \text{où } (u^e, u^l) \text{ sont les solutions de} \\ \begin{cases} \frac{\partial u^e(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial u^e(t,a)}{\partial a} = -\beta^e(a)u^e(t,a), & (t,a) \in \Omega^e, \\ \frac{\partial u^l(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial u^l(t,a)}{\partial a} = -\beta_{ex}^l(a)u^l(t,a), & (t,a) \in \Omega^l, \\ u^e(0,a) = u_0^e(a), & a \in [0, L^e], \\ u^l(0,a) = 0, & a \in [0, L^l], \\ u^e(t,0) = 0, \\ u^l(t,0) = \int_0^{L^e} \beta^e(s)u^e(t,s)ds, & t \in [0, T], \end{cases} \end{cases}$$

Ce problème admet au moins une solution optimale. La preuve est semblable à celle du théorème 1.

Dans la deuxième situation, on identifie la fonction  $\beta^l$  avec  $\beta^e$  connu. Le problème d'optimisation devient

$$[\mathbf{P}_2]'' = \begin{cases} \text{Min}_{(\beta^l \in K)} \int_0^T \left[ \int_0^{L^l} \beta^l(a) u^l(t, a) da - q_{exp}(t) \right]^2 dt, \\ \text{où } u^l \text{ est la solution de} \\ \begin{cases} \frac{\partial u^l}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^l}{\partial a}(t, a) = -\beta^l(a) u^l(t, a), & (t, a) \in \Omega^l, \\ u^l(0, a) = 0, & a \in [0, L^l], \\ u^l(t, 0) = \int_t^{L^e} \beta_{ex}^e u_0^e(a-t) e^{-\int_{a-t}^a \beta_{ex}^e(\tau) d\tau} da, & t \in [0, T], \end{cases} \end{cases}$$

où  $t$  est dans  $[0, T]$ . Comme les autres problèmes, celui-ci admet aussi un optimum.

## 7.2 Résolution du problème d'estimation continu.

On transforme le problème  $[\mathbf{P}_2]$  en un problème de points selles. Soient  $p, q$  et  $h$  les variables Lagrangiennes et  $S$  le vecteur  $(u^e, u^l, \beta^e, \beta^l, p, q, h)$ . Le Lagrangien est défini par,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S) = & \mathcal{J}(\beta^e, \beta^l) + \int_0^T \int_0^{L^e} [\partial_t u^e + \partial_a u^e + \beta^e(a) u^e] p(t, a) dadt \\ & + \int_0^T \int_0^{L^l} [\partial_t u^l + \partial_a u^l + \beta^l(a) u^l] q(t, a) dadt \\ & + \int_0^T \left[ u^l(t, 0) - \int_0^{L^e} \beta^e(s) u^e(t, s) ds \right] h(t) dt. \end{aligned}$$

La fonction  $S^*$  est un optimum de  $\mathcal{L}$  si

$$\nabla \mathcal{L}(S^*) = (\partial_{\beta^e} \mathcal{L}, \partial_{\beta^l} \mathcal{L}, \partial_p \mathcal{L}, \partial_q \mathcal{L}, \partial_{u^e} \mathcal{L}, \partial_{u^l} \mathcal{L})(S^*) = 0.$$

La dérivée du Lagrangien par rapport aux variables  $p$  et  $q$  au point  $S^*$  donnent le problème d'évolution (7.1). La dérivée du Lagrangien par rapport à  $h$  donne la condition limite pour la variable d'état  $u^l$ .

Le problème adjoint s'obtient en calculant les deux dérivées suivantes. Soit  $w$  une fonction de l'espace  $L^2(\Omega^e)$  telle que  $w(0, a) = w(t, 0) = 0$ , et où  $\Omega^e$  est égal à  $[0, T] \times [0, L^e]$ , alors

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^e}, w \right\rangle_{L^2(\Omega^e)} = - \left\langle \partial_t p + \partial_a p - \beta^e p, w \right\rangle_{L^2(\Omega^e)} \\ & - \int_0^T h(t) \int_0^{L^e} \beta^e(s) w(t, s) ds dt + \int_0^{L^e} (pw)(T, a) da + \int_0^T (pw)(t, L^e) dt. \end{aligned}$$

Comme  $\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^e}(S^*), w \right\rangle_{L^2(\Omega^e)} = 0$  pour tous  $w$ , nous déduisons le problème adjoint associé à la densité  $u^e$

$$(b) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} p^*(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} p^*(t, a) + \beta_*^e(a) p^*(t, a) = h^*(t) \beta_*^e(a), & a \in [0, L^e], \\ p^*(T, a) = 0, & a \in [0, L^e], \\ p^*(t, L^e) = 0. \end{cases}$$

Soit maintenant  $w$  une fonction de l'espace  $L^2(\Omega^l)$  telle que  $w(0, a) = 0$ , et où  $\Omega^l$  est égal à  $[0, T] \times [0, L^l]$ , la dérivée du Lagrangien par rapport à la densité larve est

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^l}, w \right\rangle_{L^2(\Omega^l)} &= -2 \int_0^T q_{exp}(t) \int_0^{L^l} \beta^l w da dt + 2 \int_0^T \left( \int_0^{L^l} \beta^l u^l da \int_0^{L^l} \beta^l w da \right) dt \\ &\quad - \left\langle \partial_t q + \partial_a q - \beta^l q, w \right\rangle_{L^2(\Omega^l)} + \int_0^T (h(t) - q(t, 0)) w(t, 0) dt \\ &\quad + \int_0^{L^l} (qw)(T, a) da + \int_0^T (qw)(t, L^l) dt. \end{aligned}$$

La fonction  $S^*$  est la solution optimale si  $\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^l}(S^*), w \right\rangle_{L^2(\Omega^l)} = 0$  pour tous  $w$ , la deuxième équation du problème adjoint est alors donnée par

$$(c) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} q^*(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} q^*(t, a) + \beta_*^l(a) q^*(t, a) = 2\beta_*^l(a) q_{exp}(t) \\ \quad -2\beta_*^l(a) \int_0^{L^l} \beta_*^l(s) u_*^{l,*}(t, s) ds, \quad a \in [0, L^l], \\ q^*(t, 0) = h^*(t), \\ q^*(T, a) = 0, \quad a \in [0, L^l], \\ q^*(t, L^l) = 0. \end{cases}$$

Ces deux problèmes adjoints sont liés par la fonction  $h(t)$ . Les valeurs de  $p^*$  pour tous  $t$  et  $a$  sont déduites si et seulement si les valeurs de  $q^*$  pour tous  $t$  et  $a$  sont connues. Le système (c) admet une solution, qui est donnée par

$$q^*(t, a) = \begin{cases} 2 \int_t^T e^{-\int_t^s \beta_*^l(\tau) d\tau} \beta_*^l(a) f^*(s) ds, & L^l \geq a > t, \\ 2 \int_a^{L^l} e^{-\int_t^s \beta_*^l(\tau) d\tau} \beta_*^l(s) f^*(t) ds, & a \leq t, \end{cases} \quad (7.3)$$

où  $f^*(s) = q_{exp}(s) - \int_0^{L^l} \beta_*^l(a) u_*^l(s, a) da$ . Alors que la solution au système (b) est

$$p^*(t, a) = \begin{cases} \int_t^T e^{-\int_t^s \beta_*^e(\tau) d\tau} \beta_*^e(a) q^*(s, 0) ds, & L^e \geq a > t, \\ \int_a^{L^e} e^{-\int_a^s \beta_*^e(\tau) d\tau} \beta_*^e(s) q^*(t, 0) ds, & a \leq t, \end{cases} \quad (7.4)$$

Ces intégrales sont définies pour tous  $t$  dans l'intervalle  $[0, T]$ . Nous avons les expressions pour les variables duales ( $p^*, q^*, h^*$ ) et les densités ( $u_*^{e,*}, u_*^{l,*}$ ), on détermine à présent les expressions pour le calcul des fonctions ( $\beta_*^{e,*}, \beta_*^{l,*}$ ). Soit  $l$  dans l'espace  $L^2([0, L^e])$  telle que  $l(L) = l(0) = 0$ ,

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta^e}, l \right\rangle_{L^2(\Omega^e)} = \left\langle u^e p - h(t) u^e, l \right\rangle_{L^2(\Omega^e)}.$$

La dérivée du Lagrangien par rapport à  $\beta^l$  est

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta^l}, l \right\rangle_{L^2(\Omega^l)} = \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \beta^l}, l \right\rangle_{L^2(\Omega^l)} + \left\langle u^l q, l \right\rangle_{L^2(\Omega^l)},$$

$$\text{où } \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \beta^l}, l \right\rangle_{L^2(\Omega^l)} = 2 \left\langle u^l \left( \int_0^{L^l} \beta^l u^l da - q_{exp} \right), l \right\rangle_{L^2(\Omega^l)}.$$

La fonction  $S^*$  est un optimum si et seulement si  $\nabla \mathcal{L}(S^*) = 0$ , c'est à dire

$$u_*^e(t, a) p^*(t, a) - q^*(t, 0) u_*^e(t, a) = 0, \quad a \in [0, L^e],$$

$$2u_*^l(t, a) \left( \int_0^{L^l} \beta_*^l(s) u_*^l(t, s) ds - q_{exp}(t) \right) + u_*^l(t, a) q^*(t, 0) = 0, \quad a \in [0, L^l],$$

où les fonctions  $p^*, q^*$  sont données par les intégrales (7.3) et (7.4) et  $(u^{e,*}, u^{l,*})$  sont donnés par la résolution de (7.1).

La résolution des deux problèmes particuliers  $[P_2]'$  et  $[P_2]''$ , définis dans le paragraphe précédent, est équivalente à celle décrite ici. Dans le premier problème, on calcule la dérivée du Lagrangien par rapport aux variables  $(\beta^e, u^e, u^l, p, q, h)$  pour finalement obtenir l'expression suivante sur l'optimum,

$$u_*^e(t, a)p^*(t, a) - q^*(t, 0)u_*^e(t, a) = 0, \quad a \in [0, L^e],$$

où  $p^*$  et  $q^*$  sont donnés par (7.3) et (7.4). Dans le deuxième cas, on dérive seulement le Lagrangien par rapport à  $(\beta^l, u^l, p, h)$ . L'expression de l'optimum dérive de la relation suivante :

$$2u_*^l(t, a)\left(\int_0^{L^l} \beta_*^l(s)u_*^l(t, s)ds - q_{exp}(t)\right) + u_*^l(t, a)q^*(t, 0) = 0, \quad a \in [0, L^l].$$

où  $u^{l,*}$  est donné par les équations d'état et  $q^*$  par l'équation (7.3).

### 7.3 Le problème discret.

On considère le maillage utilisé pour l'estimation du taux d'éclosion. Le nombre de mailles des deux domaines en âge ( $[0, L^e]$  et  $[0, L^l]$ ) est supposé identique, soit égal à  $N_a$ . La forme discrète de la fonction coût est

$$\mathcal{J}_\Delta(\beta_\Delta^e, \beta_\Delta^l) = \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^l u_i^{l,n} - q_{exp}^n \right]^2,$$

où le vecteur  $u_\Delta^{l,n}$  satisfait le système

$$\begin{cases} u_i^{e,n+1} = \frac{u_i^{e,n}(1-\frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e,n}}{1 + \Delta t \beta_i^e}, & i = 1, N_a, & n = 1, Nt - 1, \\ u_i^{l,n+1} = \frac{u_i^{l,n}(1-\frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{l,n}}{1 + \Delta t \beta_i^l}, & i = 1, N_a, & n = 1, Nt - 1, \\ u_i^{e,1} = \phi_i, & i = 1, N_a, \\ u_i^{l,1} = 0, & i = 1, N_a, \\ u_0^{e,n} = 0, & n > 0, \\ u_0^{l,n} = \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^e u_i^{e,n} & n = 0, Nt \end{cases} \quad (7.5)$$

On cherche alors les fonctions  $(\beta_\Delta^e, \beta_\Delta^l) \in K_\Delta^2$ . L'espace  $K_\Delta$  est une approximation de l'espace des fonctions  $K$ . Il est défini par

$$K_\Delta = \{\beta_\Delta(a) = \beta_i, \quad a \in C_i, \quad 0 \leq \beta_i \leq \bar{\beta}, \quad i = 1, N_a\}.$$

Le couple de solutions doit satisfaire le problème de minimisation suivant :

$$[P_2]_\Delta \begin{cases} J_\Delta(\beta_\Delta^e, \beta_\Delta^l) = \text{Min}_{(g_\Delta^1, g_\Delta^2) \in K_\Delta} J_\Delta(g_\Delta^1, g_\Delta^2) \\ \text{où } u_\Delta^l \text{ vérifie (7.5)}. \end{cases}$$

L'étude de ce problème se construit en trois parties : on vérifie d'abord que ce problème est bien posé et qu'il admet un optimum. Dans un deuxième temps, on s'assurera que le minimum

trouvée par l'algorithme de Quasi-Newton est un minimum du problème continu, à savoir qu'il appartient à l'espace des solutions admissibles et que la valeur de la fonction coût correspond à celle du problème continu.

**Théorème 11** *Le problème  $[P_2]_\Delta$  admet au moins une solution.*

**Preuve :** Soit  $d = \inf_{(\beta_\Delta^e, \beta_\Delta^l) \in K_\Delta} \mathcal{J}_\Delta(\beta_\Delta^e, \beta_\Delta^l)$ . Alors  $0 \leq d < +\infty$  ( par exemple :

$$\mathcal{J}_\Delta(0) = \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} [q_{exp}^n]^2 < +\infty).$$

Soit  $\{\beta_\Delta^k\}$  une suite minimisante associée au couple  $\{\beta_\Delta^e, \beta_\Delta^l\}$ , où  $k$  est un entier non nul, telle que

$$d + \frac{1}{k} \geq \mathcal{J}_\Delta(\beta_\Delta^k) > d,$$

où  $\mathcal{J}_\Delta(\beta_\Delta^k) = \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \beta_i^{l,k} u_i^{l,n}(\beta_\Delta^k) - q_{exp}^n \right]^2$ . Le vecteur  $u_i^{l,n}(\beta_\Delta^k)$ ,  $i = 1, Na$  correspond au calcul de la densité avec la suite  $\beta_\Delta^k$ .

La suite  $\{\beta_\Delta^k\}_k \in K_\Delta$ , elle est donc bornée. D'après le théorème de B.W, on peut en extraire une sous suite, notée  $\{\beta_\Delta^{k_n}\}_{k_n} \in K_\Delta$  qui converge vers  $\beta_\Delta^* \in K_\Delta$  c'est à dire vers  $(\beta_\Delta^{e,*}, \beta_\Delta^{l,*})$ .

Les lemmes (8) du chapitre 3 de la partie 2 nous assure que

$$|u_i^{l,n}(\beta_\Delta^k) - u_i^{l,n}(\beta_\Delta^*)| \leq C_1 |\beta_i^{l,k} - \beta_i^{l,*}| + C_2 |\beta_i^{e,k} - \beta_i^{e,*}| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\Delta(\beta_\Delta^k) &= \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \beta_i^{l,k} u_i^{l,n}(\beta_\Delta^k) - q_{exp}^n \right]^2, \\ &= \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{Na} u_i^{l,n}(\beta_\Delta^k) (\beta_i^{l,k} - \beta_i^{l,*}) + \beta_i^{l,*} (u_i^{l,n}(\beta_\Delta^k) - u_i^{l,n}(\beta_\Delta^*)) \right]^2, \\ &+ \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \beta_i^{l,*} u_i^{l,n}(\beta_\Delta^*) - q_{exp}^n \right]^2 \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \beta_i^{l,*} u_i^{l,n}(\beta_\Delta^*) - q_{exp}^n \right]^2 = \mathcal{J}_\Delta(\beta_\Delta^*) = d. \end{aligned} \quad \square$$

### 7.3.1 Résolution du problème discret

Soient  $p_i^n$  et  $q_i^n$ , pour  $i$  allant de 1 à  $Na$ , et  $n$  allant de 0 à  $Nt$ , les variables de Lagrange. La forme discrète du Lagrangien est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Delta(S) &= \mathcal{J}_\Delta(\beta_\Delta^e, \beta_\Delta^l) + \sum_{n=0}^{Nt-1} \sum_{i=1}^{Na} p_i^n \left( u_i^{e,n+1} - \frac{u_i^{e,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e,n}}{1 + \Delta t \beta_i^e} \right) \\ &+ \sum_{n=0}^{Nt-1} \sum_{i=1}^{Na} q_i^n \left( u_i^{l,n+1} - \frac{u_i^{l,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{l,n}}{1 + \Delta t \beta_i^l} \right). \end{aligned}$$

où le vecteur  $S$  est défini par  $(\beta_\Delta^e, \beta_\Delta^l, u_\Delta^e, u_\Delta^l, p_\Delta, q_\Delta)$  avec

$$\begin{aligned} u_\Delta^k &= \{u_i^{k,n}\}, \quad i = 0, Na, \quad n = 0, Nt, \quad k = e, l, \quad \text{et} \\ p_\Delta &= \{p_i^n\}, \quad q_\Delta = \{q_i^n\}, \quad i = 0, Na, \quad n = 0, Nt. \end{aligned}$$

La dérivée du Lagrangien par rapport à la variable d'état  $u_{i_0}^{e,n_0}$  et à l'optimum  $S^*$  donne la relation pour le calcul des multiplicateurs de Lagrange

$$p_{i_0}^{n_0} = \frac{\Delta t}{\Delta a} \frac{p_{i_0+1}^{n_0+1}}{1 + \Delta t \beta_{i_0+1}^{e,*}} + p_{i_0}^{n_0+1} \frac{(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a})}{1 + \Delta t \beta_{i_0}^{e,*}}, \quad i_0 = 1, N_a, \quad n_0 = 0, N_t - 1,$$

avec  $p_i^{N_t} = f_i$ . Soit  $P^n$  le vecteur de taille  $N_a$  associé au calcul de la variable duale  $p_i^n$  à l'itération  $n$ , et  $A$  la matrice  $N_a \times N_a$  telle que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a})}{1 + \Delta t \beta_1^{e,*}} & \frac{\Delta t / \Delta a}{1 + \Delta t \beta_2^{e,*}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{\Delta t / \Delta a}{1 + \Delta t \beta_{N_a}^{e,*}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a})}{1 + \Delta t \beta_{N_a}^{e,*}} \end{pmatrix}.$$

Les variables duales vérifient le système matriciel

$$P^n = AP^{n+1}, \quad n = 0, N_t - 1.$$

La matrice  $A$  est triangulaire supérieur dont ses éléments diagonaux sont positifs. Sous la condition de CFL, le système admet une unique solution.

La dérivée du Lagrangien par rapport à  $u_{i_0}^{l,n_0}$  et au point  $S^*$  donne la relation pour le calcul des variables duales suivante

$$q_{i_0}^{n_0} = -2\Delta t \Delta a \beta_{i_0}^{l,*} \left( \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^{l,*} u_i^{l,*,n_0} - q_{exp}^{n_0} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta a} \frac{q_{i_0+1}^{n_0+1}}{1 + \Delta t \beta_{i_0+1}^{l,*}} + q_{i_0}^{n_0+1} \frac{(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a})}{1 + \Delta t \beta_{i_0}^{l,*}},$$

pour  $i_0$  allant de 1 à  $N_a$  et pour  $n_0$  allant de 0 à  $N_t - 1$ . Soit  $Q^n$  le vecteur de taille  $N_a$  associé au calcul de la variable duale  $q_i^n$  à l'itération  $n$ ,  $DJ^n$  le vecteur de taille  $N_a$  défini par

$$DJ^n = \begin{pmatrix} 2\Delta t \Delta a \beta_1^{l,*} (\Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^{l,*} u_i^{l,*,n} - q_{exp}^n) \\ \vdots \\ \vdots \\ 2\Delta t \Delta a \beta_{N_a}^{l,*} (\Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^{l,*} u_i^{l,*,n} - q_{exp}^n) \end{pmatrix},$$

et  $B$  la matrice  $N_a \times N_a$  telle que

$$B = \begin{pmatrix} \frac{(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a})}{1 + \Delta t \beta_1^{l,*}} & \frac{\Delta t / \Delta a}{1 + \Delta t \beta_2^{l,*}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{\Delta t / \Delta a}{1 + \Delta t \beta_{N_a}^{l,*}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a})}{1 + \Delta t \beta_{N_a}^{l,*}} \end{pmatrix}.$$

Les variables duales satisfont le système

$$Q^n = BQ^{n+1} - DJ^n, \quad n = 0, N_t - 1.$$

La matrice  $B$  est triangulaire supérieur dont ses éléments diagonaux sont positifs. Sous la condition de CFL, ce système admet donc une unique solution.

Le lemme suivant sert à démontrer la convergence de l'algorithme de descente de Quasi-Newton vers un optimum de  $[P_2]_\Delta$ .

**Lemme 15** *Sous la condition de CFL, il existe des constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  telles que*

$$\|p^{n+1} - \tilde{p}^{n+1}\|_\infty \leq c_1 \|\beta_\Delta^e - \tilde{\beta}_\Delta^e\|_\infty, \quad n \geq 0$$

$$\|q^{n+1} - \tilde{q}^{n+1}\|_\infty \leq c_2 \|\beta_\Delta^l - \tilde{\beta}_\Delta^l\|_\infty, \quad n \geq 0$$

où  $\beta_\Delta^e$ ,  $\beta_\Delta^l$ ,  $\tilde{\beta}_\Delta^e$  et  $\tilde{\beta}_\Delta^l$  sont dans  $K_\Delta$ .

**Preuve :** La démonstration de ces inégalités a été faite dans la preuve du lemme (11) du chapitre 6.

La taille du vecteur gradient est  $N_a \times N_a$ . Les  $N_a$  premières valeurs correspondent à la dérivée du Lagrangien par rapport  $\beta^e$

$$g_i = \sum_{n=0}^{Nt} \Delta t p_{i-1}^n \frac{(u_i^{e,n}(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e,n})}{(1 + \Delta t \beta_i^e)^2}. \quad (7.6)$$

Les  $N_a$  dernières sont données par le calcul de la dérivée par rapport à  $\beta^l$

$$g_i = 2\Delta a \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} u_i^{l,n} (\Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^l u_i^{l,n} - q_{exp}^n) + \sum_{n=1}^{Nt} \Delta t q_{i-1}^n \frac{(u_i^{l,n_0}(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{l,n})}{(1 + \Delta t \beta_i^l)^2}. \quad (7.7)$$

A partir du lemme (15) précédent et du lemme (8) du chapitre 5, on montre que la Hessienne de la fonction Lagrangienne est deux fois différentiables avec dérivées continues et est localement Lipschitzienne par rapport à  $\beta_\Delta$ . On peut donc appliquer une méthode de Quasi-Newton pour l'obtention d'un minimum du problème  $[P_2]_\Delta$ . Le principe de la méthode est donné dans le paragraphe (6.3.2) du chapitre précédent.

### 7.3.2 Résultats numériques.

La méthode Quasi-Newton est implémentée dans la routine BCONG de la librairie IMSL. On l'utilise pour résoudre le problème  $[P_2]_\Delta$  selon le protocole défini au paragraphe 6.3.2 et où le gradient de la fonction est donné par les équations (7.6) et (7.7). Les pas de temps et d'âge sont fixés à 0,1 et l'âge maximal des stades oeuf et larve est égal à 5. Le temps maximal est de 10 jours. La donnée initiale est fixée à

$$u_0^e(a) = e^{-\left(\frac{a-1}{0,25}\right)^2}, \quad a \in [0, L^e]. \quad (7.8)$$

On se donne le taux d'éclosion et le taux d'émergence

$$\beta_{ex}^e(a) = e^{-\left(\frac{a-1,5}{0,25}\right)^2}, \quad a \in [0, L^e], \quad \beta_{ex}^l(a) = e^{-\left(\frac{a-3,5}{0,5}\right)^2}, \quad a \in [0, L^l]. \quad (7.9)$$

Avec ces données, on calcule la dynamique d'émergence  $q_{exp}$  sur le domaine  $[0, T]$  à partir de l'équation (7.2) et en résolvant (7.1). Sa représentation graphique est donnée sur le graphe (b) de la figure 7.1. A partir de cette dynamique temporelle d'émergence, on estime les taux d'éclosion  $\beta_{app}^e$  et d'émergence  $\beta_{app}^l$  en résolvant le problème de minimisation  $[P_2]_\Delta$ . Le couple de solutions est un optimum lorsque  $\mathcal{J}_\Delta(\beta_{app}^e, \beta_{app}^l)$  est nul, autrement dit lorsque la dynamique d'émergence calculée avec la solution approchée,  $q_{app}$ , converge vers la dynamique exacte  $q_{exp}$ .

### Estimation des deux taux de passage.

Le graphe (a) de la figure 7.1 représente les fonctions taux d'éclosion et taux d'émergence par rapport à l'âge (en jours) de l'insecte. Les courbes noire et verte sont respectivement le taux d'éclosion exact et approché, alors que les courbes bleue foncée et bleue claire représentent le taux d'émergence exact et estimé.

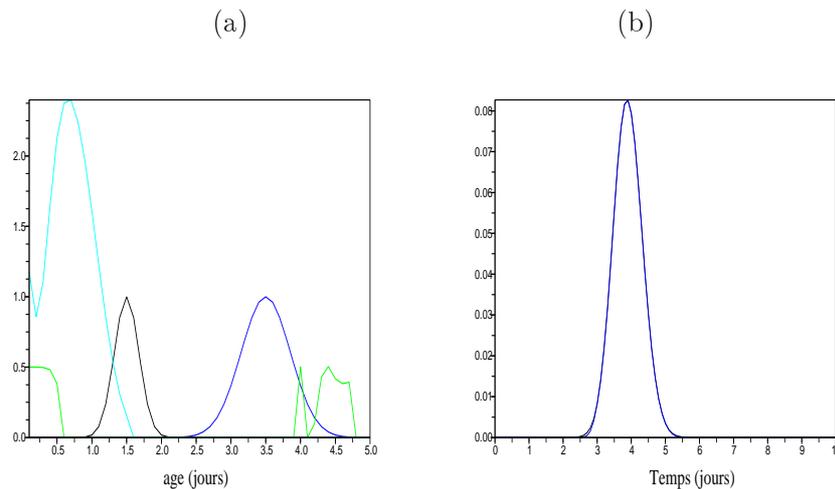


FIG. 7.1: (a) : Taux d'éclosion et d'émergence en fonction de l'âge. Les courbes noire et bleue claire sont respectivement les taux d'éclosion exact et estimé. Les courbes bleue et verte sont respectivement les taux d'émergence exact et estimé par la méthode QN. (b) : Dynamiques temporelles d'émergence en fonction du temps. Les courbes noire et bleue sont obtenues en calculant l'équation (7.2) avec respectivement les taux exact et estimé.

Les courbes des taux estimés et exactes ne se superposent pas, le problème d'optimisation n'admet donc pas d'unique solution pour cette donnée expérimentale  $q_{exp}$ . Le modèle (7.1) simule la dynamique d'émergence du graphe (b) (figure 7.1) lorsque le taux d'éclosion est défini pour des âges compris dans l'intervalle  $[1; 2]$  jours et lorsque l'émergence des papillons a lieu pendant 2 jours pour des chenilles âgées de 2,5 jours à 4,5 jours. Cette dynamique d'émergence est aussi simulée par le modèle mathématique lorsque le taux d'éclosion est défini pour des âges compris dans l'intervalle  $[4; 4,7]$  jours et lorsque l'émergence des papillons a lieu pendant 1,5 jours dès l'éclosion des chenilles ou pour des chenilles âgées d'un jour et demi. Dans cette deuxième situation, une partie de la population oeuf se développe pendant le stade oeuf et jamais pendant le stade larve. La solution estimée par la méthode QN ne permet pas de modéliser correctement la croissance de l'insecte en fonction de tous les stades de développement.

### Estimation du taux d'éclosion ou du taux d'émergence.

On propose, dans ce paragraphe, d'estimer les taux de passage l'un après l'autre. Le graphe (a) de la figure 7.2 est le résultat de la minimisation du problème  $[P_2]$  par rapport au taux de vol où le taux d'éclosion est égal à (7.9). Le deuxième graphe de cette figure est le résultat de la recherche du taux d'éclosion connaissant le taux d'émergence ( $\beta_{app}^l = \beta_{ex}^l$ ).

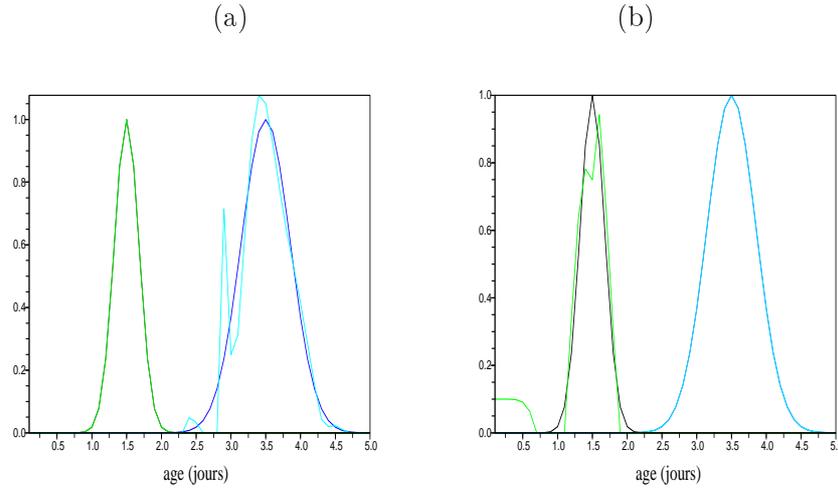


FIG. 7.2: Taux d'éclosion et d'émergence en fonction de l'âge. Les courbes noire et verte sont respectivement les taux d'éclosion exact et estimé. Les courbes bleue et bleue claire sont respectivement les taux d'émergence exact et estimé par la méthode de QN. (a) : Estimation du taux d'émergence seul. (b) : Estimation du taux d'éclosion seul.

Dans les deux résultats, l'algorithme trouve une solution oscillante. L'erreur entre les solutions exactes et approchées est supérieure au pas en âge. Les deux problèmes d'optimisation dérivant du problème  $[P_2]$  n'admettent pas d'unique solution.

Figure (7.2)	(a)	(b)
$\mathcal{J}(\beta_{app}^e, \beta_{app}^l)$	$1,8310^{-7}$	$1,5810^{-8}$
$\ q_{exp} - q_{app}\ _2$	$1,3510^{-3}$	$3,9710^{-4}$
$\ q_{exp} - q_{app}\ _\infty$	$6,2210^{-4}$	$1,4010^{-4}$

TAB. 7.1: Valeur de la fonction coût à l'optimum, norme  $L^2$  et erreur maximale entre les dynamiques d'émergence exacte et simulée avec la solution estimée de la figure 7.2.

## 7.4 Régularisation de la solution.

On estime les taux d'éclosion et d'émergence du modèle (7.1) en imposant des conditions de régularité sur ces fonctions. Pour cela, on minimise la fonction coût suivante

$$\mathcal{F}(\beta^e, \beta^l) = \mathcal{J}(\beta^e, \beta^l) + \eta_1 \|\beta^e\|_2^2 + \eta_2 \|\beta^l\|_2^2 + \mu_1 \|\partial_a \beta^e\|_2^2 + \mu_2 \|\partial_a \beta^l\|_2^2, \quad (7.10)$$

où  $\mathcal{J}$  est la fonction coût du problème  $[P_2]$  et  $\eta_i$  et  $\mu_i$ , pour  $i$  égal à 1 et 2, sont des constantes positives plus petites que 1. La routine BCONG est utilisée pour l'estimation des deux taux de passage. Le couple de solutions recherchées est régularisé par la norme minimale des taux de passage mais aussi la norme minimale de leur dérivée première. La courbe expérimentale  $q_{exp}$  est construite à partir de la donnée initiale et des taux de passage exactes définis dans (7.8) et (7.9).

### Estimation des deux taux de passage.

La solution tracée sur le graphe (a) de la figure 7.3 est obtenue pour  $\eta_i$  égal à  $10^{-8}$  et  $\mu_i$  nul, pour  $i$  égal à 1 et 2. Alors que la solution dessinée sur le second graphe est la solution du problème d'estimation avec  $\eta_i$  et  $\mu_i$  égaux à  $10^{-8}$ , pour  $i$  égal à 1 et 2.

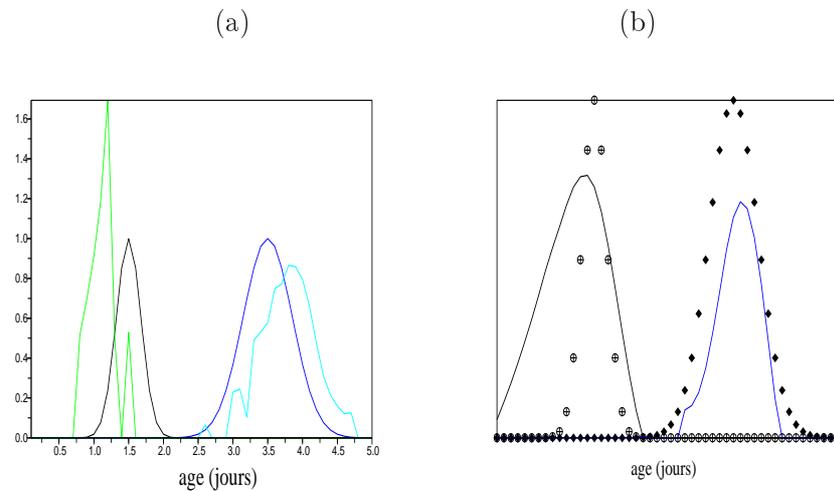


FIG. 7.3: Taux d'éclosion et d'émergence en fonction de l'âge. Les courbes noire et bleue sont respectivement le taux d'éclosion exact et le taux d'émergence exact. (a) : Les courbes verte et bleu claire sont respectivement le taux d'éclosion estimé et le taux d'émergence estimé par la méthode de QN avec  $\eta_i$  égal à  $10^{-8}$  et  $\mu_i$  nul, pour  $i$  égal à 1 et 2. (b) : Les courbes en pointillés sont la solution au problème d'estimation  $[P_2]$  avec  $\eta_i$  et  $\mu_i$  égaux à  $10^{-8}$ , pour  $i$  égal à 1 et 2.

Pour ces deux résultats, la solution estimée ne se superpose pas à la solution exacte. Le problème numérique d'estimation des taux d'éclosion et d'émergence avec des conditions de régularité sur ces fonctions n'admet pas d'unique solution.

Le développement de la cohorte oeuf en papillon est décrit par le modèle (7.1) pour différentes valeurs des fonctions de passage entre les stades oeuf, larve et papillon. Les fonctions estimées ont un support différent des fonctions exactes : dans le premier calcul le support du taux d'éclosion est plus petit que le taux exacte alors qu'il est deux fois plus grand dans le deuxième calcul. A l'inverse, le support de la fonction de passage entre les stades larve et papillon est plus grand que la solution exacte dans le premier résultat et est plus petit dans le second. Autrement dit, les différences en âge de développement pour une cohorte oeuf peuvent être plus importantes au stade oeuf ou au stade larve. D'après les mesures faites expérimentalement sur cette population (Auroy, 2006 ; Thiéry 2005) en conditions contrôlées, les différences maximales de développement entre les individus sont plus grandes au stade larve (20 à 25 jours selon les conditions) qu'au stade oeuf (3 jours). La solution estimée dans le premier exemple est donc cohérente avec les observations expérimentales alors que la deuxième solution n'est pas correcte.

#### Estimation du taux d'éclosion connaissant le taux de vol.

On propose d'estimer le taux d'éclosion du modèle (7.1) en admettant que le taux d'émergence est donné par (7.9). On résout alors le problème  $[P_2]'$  où la solution est régularisée avec la norme minimale de la dérivée seconde du taux d'éclosion. L'algorithme de Quasi-Newton trouve le taux d'éclosion tracé en vert sur le graphe (a) de la figure 7.4. Le graphe (b) représente les dynamiques d'émergence exacte (courbe noire) et calculée avec le taux estimé (courbe bleue) au cours du temps.

Figures 7.3	(a)	(b)
$\eta_i, i = 1, 2$	$10^{-8}$	$10^{-8}$
$\mu_i, i = 1, 2$	0	$10^{-10}$
$\mathcal{J}(\beta_{app}^e, \beta_{app}^l)$	$6,1110^{-6}$	$5,3210^{-7}$
$\mathcal{F}(\beta_{app}^e, \beta_{app}^l)$	$6,1210^{-6}$	$5,6910^{-7}$
$\ q_{exp} - q_{app}\ _{\infty}$	$3,910^{-3}$	$1,0710^{-3}$
$\eta_1 \ \beta_{app}^e\ _2^2$	$6,4110^{-9}$	$5,3110^{-9}$
$\eta_2 \ \beta_{app}^l\ _2^2$	$5,1110^{-9}$	$2,710^{-9}$
$\mu_1 \ \partial_a \beta_{app}^e\ _2^2$	0	$1,3010^{-8}$
$\mu_2 \ \partial_a \beta_{app}^l\ _2^2$	0	$1,6410^{-8}$

TAB. 7.2: Valeur de la fonction coût à l'optimum, norme  $L^2$  et erreur maximale entre les dynamiques d'émergence exacte et simulée avec la solution estimée de la figure 7.3.

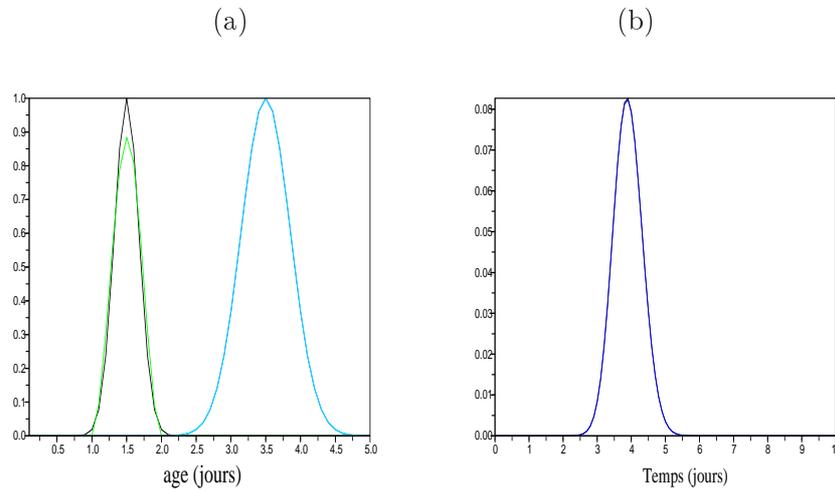


FIG. 7.4: (a) : Taux d'éclosion et d'émergence en fonction de l'âge. Les courbes noire et verte sont respectivement les taux d'éclosion exact et estimé. Les courbes bleue et bleue claire sont respectivement les taux d'émergence exact et estimé par la méthode de QN. (b) : Dynamiques temporelles d'émergence en fonction du temps. Les courbes noire et bleue sont obtenues en calculant l'équation (7.2) avec respectivement les taux exact et estimé.

L'erreur maximale entre les solutions estimée et exacte sont de l'ordre de 0,1, c'est à dire de l'ordre de l'erreur du schéma numérique. Le problème d'estimation  $[P_2]'$  admet alors une unique solution numérique pour cette donnée expérimentale (graphe (b) de la figure 7.4).

L'estimation du taux d'éclosion du modèle *Lobesia botrana* annuel pour  $E(t)$  constant au cours du temps est possible avec des mesures expérimentales portant sur la dynamique temporelle d'éclosion, sur la pyramide des âges des larves et sur la dynamique temporelle de vol.

### Estimation du taux d'émergence connaissant le taux d'éclosion.

On étudie dans ce paragraphe le problème  $[P_2]''$  défini au dessus. A partir de la dynamique d'émergence dessinée en noire sur le graphe (b) de la figure 7.5, on estime le taux d'émergence en imposant des conditions de régularité. On minimise la fonction coût de l'équation (7.10) avec  $\eta_2$  nul et  $\mu_2$  égal à  $10^{-8}$ . L'algorithme de Quasi-Newton identifie la fonction tracée en bleu claire sur le graphe (a) de la figure 7.5.

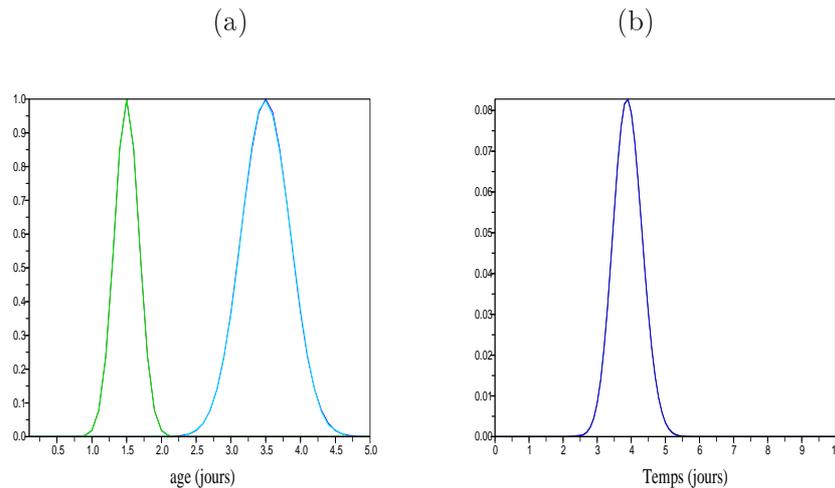


FIG. 7.5: (a) : Taux d'éclosion et d'émergence en fonction de l'âge. Les courbes noire et verte sont respectivement les taux d'éclosion exact et estimé. Les courbes bleue et bleu claire sont respectivement les taux d'émergence exact et estimé par la méthode de QN. (b) : Dynamiques temporelles d'émergence en fonction du temps. Les courbes noire et bleue sont obtenues en calculant l'équation (7.2) avec respectivement les taux exact et estimé.

Les solutions exacte et approchée se superposent, le problème d'optimisation  $[P_2]''$  discret admet une unique solution.

A partir de la dynamique temporelle d'éclosion ou de la pyramide des âges des larves, on peut estimer numériquement un unique taux d'éclosion pour le modèle *Lobesia botrana* annuel où le vecteur  $E(t)$  est supposé constant au cours du temps. Le taux d'émergence peut, par la suite être identifié avec une donnée expérimentale portant sur la distribution dans le temps de l'émergence des papillons. Ainsi, le modèle mathématique reproduit exactement le développement d'une cohorte oeuf sous des conditions climatiques constantes.

#### 7.4.1 Estimation des taux de passage pour une dynamique d'émergence expérimentale.

On souhaite estimer les taux d'émergence et d'éclosion du modèle (7.1) à partir d'une dynamique d'émergence mesurée expérimentalement mais différente d'une fonction gaussienne.

Sur une échelle plus petite que le jour, la dynamique d'émergence en fonction du temps mesurée expérimentalement ressemble à une fonction constante par morceaux, ou à une succession de fonctions gaussiennes. Le modèle (7.1) simule ces dynamiques expérimentales pour certaines valeurs du taux d'éclosion, du taux d'émergence et de la donnée initiale. On se construit ces dynamiques de vol en imposant aux fonctions  $(\beta_{ex}^e, \beta_{ex}^l, u_0^e)$  les trois valeurs suivantes : une

gaussienne, une fonction constante par morceaux ou une fonction de Dirac. Globalement, on obtient une courbe d'émergence sous la forme d'une succession de gaussiennes lorsqu'au moins une des fonctions  $u_0^e$ ,  $\beta_{ex}^e$  ou  $\beta_{ex}^l$  s'exprime avec la fonction Dirac. C'est encore vrai lorsqu'on souhaite reproduire une dynamique de vol en forme d'une fonction créneau. A partir de ces dynamiques d'émergence en fonction du temps, on estime les taux d'éclosion et d'émergence en résolvant  $[P_2]$ .

D'une manière générale, le problème  $[P_2]$  n'admet pas d'unique solution quelque soit la dynamique d'émergence mesurée en conditions de laboratoire. Cependant, on détermine deux cas particuliers où le problème  $[P_2]$  admet un unique couple de solutions  $(\beta^e, \beta^l)$ . La dynamique d'émergence du graphe (b) de la figure 7.6 est construite à partir de fonctions de passage égales à une fonction Dirac et une donnée initiale égale à une fonction gaussienne centrée en l'âge 1 jour. La solution du problème d'estimation est tracée sur le graphe (a) de cette figure.

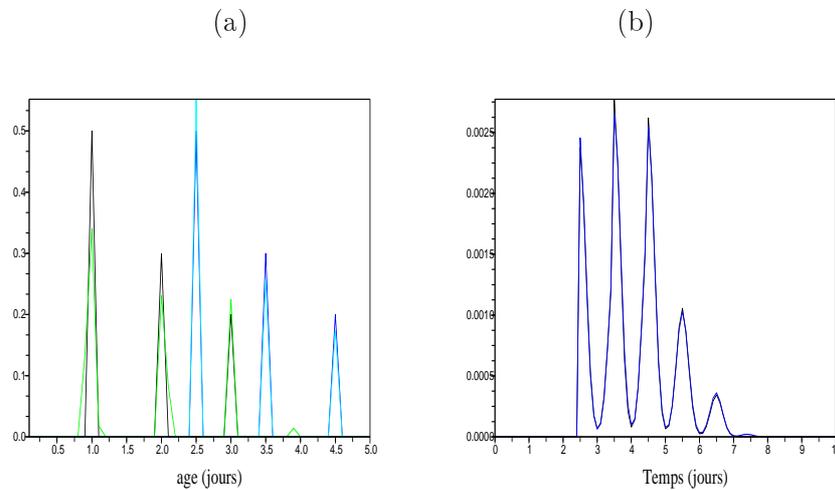


FIG. 7.6: (a) : Taux d'éclosion et d'émergence en fonction de l'âge. Les courbes noire et verte sont respectivement les taux d'éclosion exact et estimé. Les courbes bleue et bleue claire sont respectivement les taux d'émergence exact et estimé par la méthode de QN. (b) : Dynamiques temporelles d'émergence en fonction du temps. Les courbes noire et bleue sont obtenues en calculant l'équation (7.2) avec respectivement les taux exact et estimé.

La solution estimée par l'algorithme de QN et la solution exacte se superposent, le problème  $[P_2]$  discret admet une unique solution pour une dynamique d'émergence caractérisée par un pic gaussien par jour. Dans cette situation, la dynamique d'éclosion simulée avec le taux d'éclosion estimé est aussi une succession de pics gaussiens.

La dynamique d'émergence tracée sur le graphe (b) de la figure 7.7 a été obtenue avec l'équation (7.2) où les taux d'éclosion et d'émergence et la donnée initiale du modèle (7.1) sont des fonctions créneau. Cette dynamique ressemble à une fonction gaussienne et est différente des dynamiques mesurées expérimentalement. La solution obtenue au problème  $[P_2]$  avec cette dynamique d'émergence est dessinée sur le graphe (a).

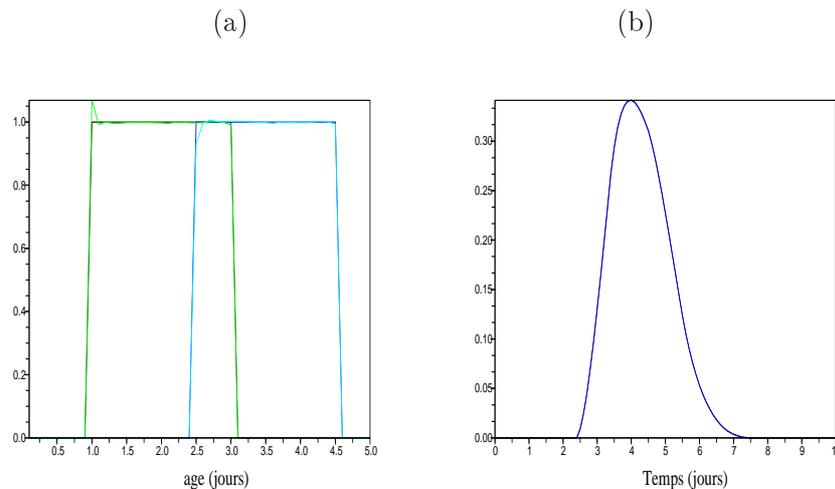


FIG. 7.7: (a) : Taux d'éclosion et d'émergence en fonction de l'âge. Les courbes noire et verte sont respectivement le taux d'éclosion exact et estimé. Les courbes bleue et bleue claire sont respectivement le taux d'émergence exact et estimé par la méthode de QN. (b) : Dynamiques temporelles d'émergence en fonction du temps. Les courbes noire et bleue sont obtenues en calculant l'équation (7.2) avec respectivement les taux exact et estimé.

La solution se confond avec les taux d'éclosion et d'émergence exactes. Le problème  $[P_2]$  discret admet une unique solution pour cette dynamique d'émergence gaussienne.

Ces deux calculs montrent que le problème (7.1)-(7.2) admet numériquement un unique couple de fonctions  $(\beta^e, \beta^l)$  lorsque les taux d'éclosion et d'émergence sont des fonctions constantes par rapport à l'âge et lorsque la donnée initiale est une fonction gaussienne.

#### 7.4.2 Estimation du taux d'émergence pour une dynamique d'émergence expérimentale.

On s'intéresse au cas particulier d'identifier le taux d'émergence du modèle (7.1) à partir d'une dynamique de vol des papillons en fonction du temps mesurée expérimentalement. On résout le problème  $[P_2]''$  avec deux données expérimentales qui sont la dynamique d'éclosion en fonction du temps  $q_{eclo}$  et la dynamique d'émergence temporelle  $q_{exp}$ . Ces données sont ajustées à l'algorithme de minimisation, autrement dit les éclosions et les émergences mesurées sur une journée sont réparties sur une échelle de 24h selon deux approches. Dans la première, on suppose que la probabilité d'éclore et d'émerger est la même quelque soit l'heure de la journée. Par conséquent, la dynamique temporelle des populations de larves et de papillons résultante est une fonction du temps constante par morceaux. La deuxième solution est de concentrer les éclosions et les émergences sur une période précise de la journée. La dynamique des populations de larves et de papillons ressemble dans ce cas à la succession de pics gaussiens.

### Les éclosions sont concentrées à un moment précis de la journée.

Le modèle (7.1) simule, d'après le chapitre 6, une dynamique d'éclosion sous la forme d'une succession de pics gaussiens à partir d'une donnée initiale gaussienne et d'un taux d'éclosion égal à une somme de fonctions Diracs. La dynamique d'émergence du graphe (b) de la figure 7.8 est construite en résolvant l'équation (7.2) et le système (7.1) avec cette dynamique d'éclosion expérimentale et un taux d'émergence gaussien. L'algorithme de Quasi-Newton calcule le taux d'émergence dessiné en bleu clair sur le graphe (a) de la figure 7.8.

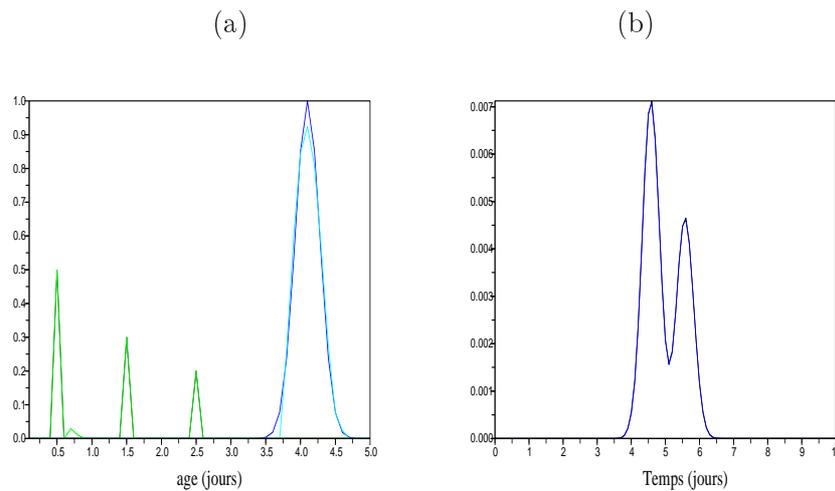


FIG. 7.8: (a) : Taux d'éclosion et d'émergence en fonction de l'âge. Les courbes noire et verte sont respectivement le taux d'éclosion exact et estimé. Les courbes bleue et bleu clair sont respectivement le taux d'émergence exact et estimé par la méthode de QN. (b) : Dynamiques temporelles d'émergence en fonction du temps. Les courbes noire et bleue sont obtenues en calculant l'équation (7.2) avec respectivement les taux exact et estimé.

La solution estimée se superpose à la solution exacte. L'erreur d'approximation est inférieure à 0,1, le problème  $[P_2]''$  discret admet alors une unique solution pour cette dynamique d'émergence des papillons.

### Les éclosions sont constantes sur la journée.

Le modèle (7.1) simule, d'après le chapitre 6, une dynamique d'éclosion sous la forme d'une fonction constante par morceaux à partir d'une donnée initiale égale à une fonction créneau et d'un taux d'éclosion égal à une somme de fonctions Diracs. La dynamique d'émergence du graphe (b) de la figure 7.9 est construite en résolvant l'équation (7.2) et le système (7.1) avec cette dynamique d'éclosion expérimentale et un taux d'émergence égal à une fonction créneau. L'algorithme de Quasi-Newton calcule le taux d'émergence dessiné en bleu clair sur le graphe (a) de la figure 7.9.

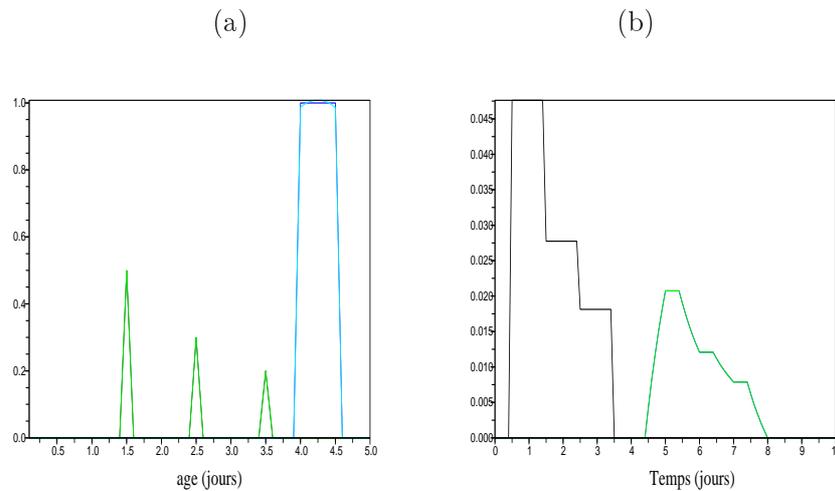


FIG. 7.9: (a) : Taux d'éclosion et d'émergence en fonction de l'âge. Les courbes noire et verte sont respectivement le taux d'éclosion exact et estimé. Les courbes bleue et bleue claire sont respectivement le taux d'émergence exact et estimé par la méthode de QN. (b) : Dynamiques temporelles d'éclosion et d'émergence en fonction du temps. La courbe noire est la dynamique d'éclosion alors que les courbes bleue et verte sont obtenues en calculant l'équation (7.2) avec respectivement les taux d'émergence exact et estimé.

La solution estimée se superpose à la solution exacte. Le problème  $[P_2]''$  discret admet alors une unique solution pour cette dynamique d'émergence des papillons.

Dans ce paragraphe, on a montré que le modèle (7.1) simule des dynamiques d'émergence mesurée expérimentalement et qu'il admet numériquement un unique taux d'émergence lorsque la condition de renouvellement du stade larvaire est non négative en fonction du temps.

## 7.5 Application à des données expérimentales.

On applique le problème d'estimation  $[P_2]''$  sur les données de Thiéry qui n'ont pas été publiées. Sous des conditions constantes de 23°C et 60% h.r., il a mesuré le temps de développement (D) de 293 oeufs nés le même jour. La dynamique d'émergence résultante s'étale sur 22 jours et commence 30 jours après la naissance des individus. Les larves ont grandi séparément dans des godets qui ont été rempli d'une alimentation artificielle. La proportion d'émergence sur chaque jour est donnée en pourcentage (%) et en nombre d'individus (nb) dans le tableau 7.3.

jour	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
nb	2	1	6	11	10	31	22	25	25	22	24
%	1	0,5	2	4	5	11	8	9	9	8	8

jour	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
nb	34	19	17	12	7	4	7	4	5	1	4
%	12	6,5	6	4	2	1	2	1	0,3	1	0

TAB. 7.3: Dynamique d'émergence en nombre d'individus ( $nb$ ) et en pourcentage de 293 oeufs nés le même jour et mesurée en conditions de laboratoire par Thiéry (Données non publiées).

On pose  $T$  égal à 55 jours et la dynamique expérimentale  $q_{exp}$  est tracée en noir sur le graphe (b) de la figure 7.10. Le taux d'éclosion utilisé dans ce calcul est celui du graphe (a) de la figure 6.8 qui permet de simuler avec le modèle (7.1) la dynamique d'éclosion mesurée par Auroy pour des conditions thermiques de 20°C constant et hygrométriques de 60% r.h.. On suppose que la durée de développement et les différences de croissances entre les individus d'une cohorte oeuf sont identiques. La routine de minimisation, BCONG, trouve le taux d'émergence du graphe (a) de la figure 7.10.

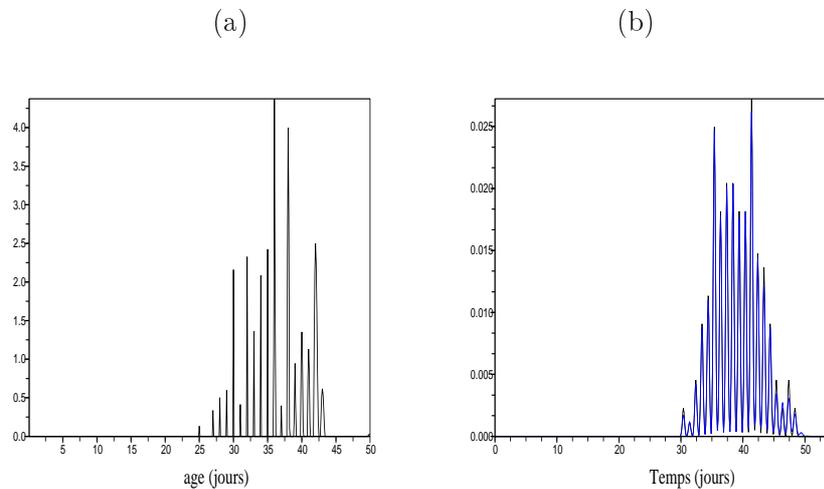


FIG. 7.10: (a) : Taux d'émergence estimé par l'algorithme de QN en fonction de l'âge. (b) : Dynamiques temporelles d'émergence en fonction du temps. La courbe noire est la donnée expérimentale et la courbe bleue est obtenue en calculant l'équation (7.2) avec le taux d'émergence estimé.

Les premiers papillons de cette population émergent au 25ème jour du stade larve alors que les derniers émergent au 43ème jours. La différence maximale d'âge d'émergence est de 18 jours, soit 2 semaines et demi, pour cette cohorte d'oeufs d'âge moyen d'un jour. La proportion d'émergence est variable en fonction de l'âge d'émergence, cependant un maximum d'émergence se produit aux 36ème et au 38ème jour.

## 7.6 Estimation des taux d'émergence mâle et femelle.

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'estimation du taux d'émergence des papillons en fonction du sexe et de l'âge des individus. On propose de modéliser le développement des individus mâles et femelles selon deux approches. Dans la première, la structuration de la population par rapport au sexe des individus est faite au stade larve alors que dans la deuxième approche, on l'applique au stade papillon. Les modèles mathématiques qui découlent de ces hypothèses sont différents par rapport à leur structure mais sont constitués des deux taux d'émergence.

### 7.6.1 Structuration de la population au stade larve.

On appelle  $u^e(t, a)$  la densité d'individus oeuf à l'instant  $t$  et à l'âge  $a$ ,  $u^{lm}(t, a)$  celle des larves mâles et  $u^{lf}(t, a)$  celle des larves femelles. Le vieillissement de ces populations est modélisé par

$$\begin{cases} \frac{\partial u^e}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^e}{\partial a}(t, a) = -\beta^e(a)u^e(t, a), & t > 0 \quad a \in [0, L^e], \\ \frac{\partial u^{lm}}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^{lm}}{\partial a}(t, a) = -\beta^{lm}(a)u^{lm}(t, a), & t > 0 \quad a \in [0, L^m], \\ \frac{\partial u^{lf}}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^{lf}}{\partial a}(t, a) = -\beta^{lf}(a)u^{lf}(t, a), & t > 0 \quad a \in [0, L^f], \end{cases} \quad (7.11)$$

où  $L^e$ ,  $L^m$ , et  $L^f$  sont respectivement l'âge maximal de vie des oeufs, des larves mâles et des larves femelles. Les conditions de renouvellement associées à ces densités sont données par

$$\begin{cases} u^e(t, 0) = 0, & t > 0, \\ u^{lm}(t, 0) = \tau \int_0^{L^e} \beta^e(s)u^e(t, s)ds, & t > 0, \\ u^{lf}(t, 0) = (1 - \tau) \int_0^{L^e} \beta^e(s)u^e(t, s)ds, & t > 0, \end{cases} \quad (7.12)$$

où la constante  $\tau$  est le sexe ratio. La condition de renouvellement du stade oeuf est nulle car aucun oeuf est introduit dans l'expérience au cours du temps. Les données initiales sont

$$u^k(0, a) = u_0^k(a), \quad a \in [0, L^k], \quad k = e, lm, lf. \quad (7.13)$$

Les dynamiques d'émergence associées aux papillons femelle et mâle sont modélisées par les équations

$$q_f(t) = \int_0^{L^f} \beta^{lf}(s)u^{lf}(t, s)ds, \quad q_m(t) = \int_0^{L^m} \beta^{lm}(s)u^{lm}(t, s)ds, \quad t > 0, \quad (7.14)$$

où  $q_f$  et  $q_m$  correspondent respectivement aux mesures expérimentales de la dynamique d'émergence des femelles et celle des mâles. On détermine les taux de passage en résolvant le problème

$$\text{Min}_{\beta^{lm}, \beta^{lf}} \int_0^T \left[ \int_0^{L^m} \beta^{lm}(a)u^{lm}(t, a)da - q_m(t) \right]^2 dt + \int_0^T \left[ \int_0^{L^f} \beta^{lf}(a)u^{lf}(t, a)da - q_f(t) \right]^2 dt$$

où  $u^{lm}$  et  $u^{lf}$  sont données par (7.11)-(7.12)-(7.13).

La mesure sur le temps de développement ou de la dynamique d'émergence au cours du temps de ces populations est généralement faite sur une génération. Dans ce cas, le problème d'estimation du couple de fonctions  $(\beta^{l_m}, \beta^{l_f})$  revient à étudier simultanément les problèmes suivant

$$[\mathbf{P}_2^k] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{\beta^{l_k}} \int_0^T \left[ \int_0^{L^k} \beta^{l_k}(a) u^{l_k}(t, a) da - q_k(t) \right]^2 dt, \\ \text{où } u^{l_k} \text{ est solution de} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^e}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^e}{\partial a}(t, a) = -\beta^e(a) u^e(t, a), \quad t > 0, \quad a \in [0, L^e], \\ \frac{\partial u^{l_k}}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^{l_k}}{\partial a}(t, a) = -\beta^{l_k}(a) u^{l_k}(t, a), \quad t > 0, \quad a \in [0, L^k], \\ u^e(0, a) = u_0^e(a), \quad a \in [0, L^e], \\ u^{l_k}(0, a) = u_0^{l_k}(a), \quad a \in [0, L^k], \\ u^e(t, 0) = 0, \quad t > 0, \\ u^{l_k}(t, 0) = \int_0^{L^e} \beta^e(s) u^e(t, s) ds, \quad t > 0, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où  $k = m, f$ .

Si la donnée initiale des densités des populations larvaire mâle et femelle est nulle quelque soit l'âge, alors le modèle simule la croissance d'une cohorte d'oeufs jusqu'au stade adulte. Ce problème d'estimation est équivalent à celui étudié dans ce chapitre, à savoir l'estimation du taux d'émergence unisexe. Dans le cas contraire, c'est à dire où les fonctions  $u_0^{l_m}(a)$  et  $u_0^{l_f}(a)$  sont non nulles pour tous les âges et la donnée initiale du stade oeuf est nulle, les dynamiques de vol sont calculées à partir d'une cohorte de larves. La condition de renouvellement des stades larves mâle et femelle sont nulles. Dans ce cas, les problèmes d'estimation sont équivalents au premier problème étudié dans cette thèse, à savoir l'estimation du taux d'éclosion.

### Application à des données expérimentales.

On utilise la dynamique d'émergence des 293 oeufs nés le même jour présentée au paragraphe 7.5 pour estimer les taux d'émergence des mâles et des femelles du modèle (7.11)-(7.12)-(7.13). Le tableau 7.4 donne la proportion d'émergence par jour en pourcentage (%), en nombre d'individus (nb) et en fonction du sexe des individus. Les valeurs en pourcentage sont utilisées pour représenter les dynamiques  $q_f$  et  $q_m$  dans les problèmes d'estimation  $[P_2^k]$  pour  $k$  égal à  $f$  et  $m$ . L'âge maximal de vie aux stades larve mâle et femelle est fixé 50 jour et le temps final des mesures est 55 jours.

jour	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
nb fem	0	0	0	0	1	5	9	10	18	18	14	17
nb mâle	2	1	6	11	9	26	13	15	7	4	10	17
% fem	0	0	0	0	0,3	1,7	3,1	3,4	6,1	6,1	4,7	5,8
%mâle	0,7	0,3	2	3,7	3,1	8,8	4,4	5,1	2,4	1,4	3,4	5,8

jour	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	total
nb fem	11	12	9	5	1	3	2	3	0	3	140
nb mâle	8	5	3	2	3	4	2	2	1	1	152
% fem	3,7	4,1	3,1	1,7	0,3	1	0,7	1	0	1	47,8
% mâle	2,7	1,7	1	0,7	1	1,4	0,7	0,7	0,3	0,3	51,6

TAB. 7.4: Dynamiques d'émergence, en nombre d'individus (nb), en pourcentage et en fonction du sexe des individus de 293 oeufs nés le même jour et mesurées en conditions de laboratoire par Thiéry (Données non publiées).

L'algorithme détermine les taux d'émergence mâle et femelle de la figure 7.11. Le premier papillon émerge au 24ème jour du stade larvaire pour les mâles alors qu'il apparaît qu'au 28ème jour pour les femelles. La protandrie, c'est à dire la différence d'émergence entre les mâles et les femelles, est de 4 jours. L'émergence du dernier papillon dans les deux populations a lieu au plus tard le 46ème jour du développement de la larve.

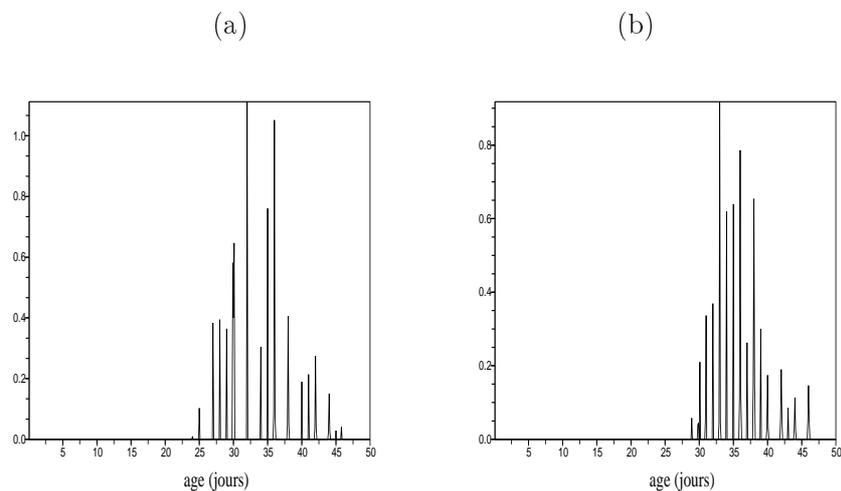


FIG. 7.11: Taux d'émergence estimé par l'algorithme de QN en fonction de l'âge à partir de la dynamique expérimentale du tableau 7.4. (a) : Taux d'émergence mâle. (b) : Taux d'émergence femelle.

Les dynamiques d'émergence associées à ces taux estimés sont représentées en vert sur la figure 7.12. Les courbes se superposent aux courbes de la donnée expérimentale, le modèle (7.11)-(7.12)-(7.13) simule, pour des taux d'émergence définis sur les graphes (a) et (b) de la figure 7.11 la dynamique d'émergence mesurée en conditions de laboratoire.

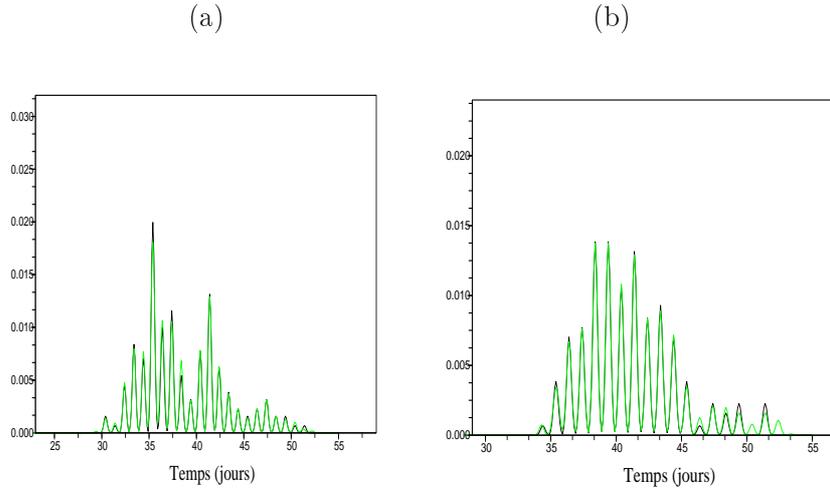


FIG. 7.12: *Dynamiques temporelles d'émergence en fonction du temps. La courbe noire est la donnée expérimentale et la courbe bleue est obtenue en calculant l'équation (7.14) avec respectivement les taux exactes et estimés. (a) : Dynamique d'émergence des mâles. (b) : Dynamique d'émergence des femelle.*

### 7.6.2 Structuration de la population au stade papillon.

On différencie les individus d'une population Eudémis par rapport à leur sexe au stade papillon. Dans cette situation, le développement des populations Eudémis jusqu'au stade adulte est modélisé par

$$\begin{cases} \frac{\partial u^e}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^e}{\partial a}(t, a) = -\beta^e(a)u^e(t, a), & t > 0 \quad a \in [0, L^e] \\ \frac{\partial u^l}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^l}{\partial a}(t, a) = -(\beta^{lf} + \beta^{lm})(a)u^l(t, a), & t > 0 \quad a \in [0, L^l] \end{cases} \quad (7.15)$$

où  $L^e$  et  $L^l$  sont respectivement l'âge maximal de vie des oeufs et des chenilles. Le taux d'émergence général  $\beta^l$  utilisé dans le problème d'estimation  $[P_2]$  est décomposé en la somme du taux d'émergence femelle  $\beta^{lf}$  et du taux d'émergence des mâles  $\beta^{lm}$ . Les conditions aux limites pour le système (7.15) sont

$$\begin{cases} u^e(t, 0) = 0, & t > 0, \\ u^l(t, 0) = \int_0^{L^e} \beta^e(s)u^e(t, s)ds, & t > 0. \end{cases} \quad (7.16)$$

Les données initiales sont

$$u^k(0, a) = u_0^k(a), \quad a \in [0, L^k], \quad k = e, l. \quad (7.17)$$

Les dynamiques d'émergence sont modélisées par les équations suivantes

$$q_f(t) = \int_0^{L^l} \beta^{lf}(s)u^l(t, s)ds, \quad q_m(t) = \int_0^{L^l} \beta^{lm}(s)u^l(t, s)ds, \quad t > 0 \quad (7.18)$$

La dynamique de vol générale étudiée précédemment  $q_{exp}$  est décomposée en  $q_f$  et  $q_l$ . Le problème

d'identification des taux de passage est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{\beta^{lm}, \beta^{lf}} \int_0^T \left[ \int_0^{L^l} \beta^{lm}(a) u^l(t, a) da - q^m(t) \right]^2 dt \\ \quad + \int_0^T \left[ \int_0^{L^l} \beta^{lf}(a) u^l(t, a) da - q^f(t) \right]^2 dt, \\ \text{où } u^l \text{ est solution de (7.15)-(7.16)-(7.17)} \end{array} \right.$$

Lorsque la fonction  $u_0^l(a)$  est nulle sur le domaine  $[0, L^l]$  alors ce problème d'estimation est celui traité au paragraphe 7.1. Ce problème admet une unique solution si le taux d'éclosion et la donnée initiale du stade oeuf sont données. On résout ce problème pour la dynamique d'émergence expérimentale présentée dans le tableau (7.4). Le graphe (a) de la figure 7.13 représente le taux d'émergence mâle alors que le graphe (b) correspond au taux d'émergence des femelles.

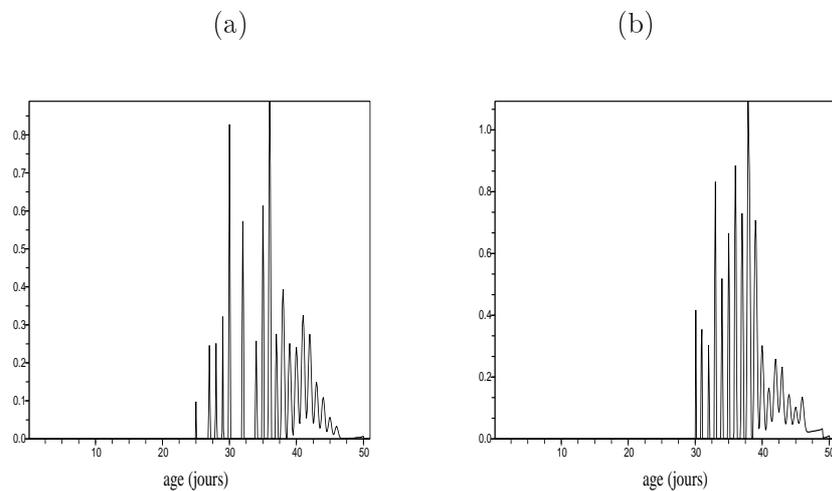


FIG. 7.13: Taux d'émergence estimé par l'algorithme de QN en fonction de l'âge à partir de la dynamique expérimentale du tableau 7.4. (a) : Taux d'émergence mâle. (b) : Taux d'émergence femelle.

Sur une cohorte de 100 oeufs âgés d'un jour en moyenne, le modèle (7.15) simule, à partir de ces taux estimés, le développement d'environ 51 larves en adultes mâles et 48 larves en femelles. Ces proportions sont celles mesurées expérimentalement (tableau (7.4)).

### Application aux données expérimentales.

On dispose de mesures sur le temps de développement de cohortes de L1 âgées du même jour jusqu'au stade adulte. Ces chenilles ont été placées dans des godets contenant une nourriture à base de raisin. Le protocole de cette expérience est donné sur l'article de Moreau et Thiéry (2006). L'objectif de cette expérience était de montrer les effets de la nourriture sur le développement larvaire. A partir de la dynamique d'émergence mesurée sur ces populations, on estime le taux d'émergence des papillons femelles et mâles en fonction du cépage.

Le tableau 7.5 donne le nombre de papillons émergeant par jour dont les chenilles ont été alimentées sur pinot noir, Chardonnay et Lambrusque. La figure 7.14 correspond aux taux d'émergence des populations de femelles et de mâles estimés à partir de la dynamique d'émergence obtenue sur pinot noir, sur chardonnay et sur lambrusque. Les âges d'émergence en papillon de ces cohortes de larves sont compris dans l'intervalle [25 ; 40] jours pour les mâles et [25 ; 37] pour les femelles sur les 3 cépages. Les différences de développement entre les mâles sont plus importantes sur chardonnay (13 jours) que sur pinot noir (7 jours) alors que pour les femelles ces différences sont les plus importantes sur lambrusque (11 jours) que sur chardonnay (7 jours).

## Pinot noir

jour	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
% fem	0	2,2	13,4	10,1	12,3	15,7	1,12	2,2	4,5	1,12
% mâle	7,8	14,6	4,5	2,2	2,2	1,12	1,12	3,3	0	0

## Chardonnay

jour	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
% fem	1,1	3,3	6,6	19,7	7,7	10,9	6,6	0	0	0	0	0	0	0	0
% mâle	0	1,1	1,1	1,1	0	5,5	17,6	7,7	3,3	3,3	0	2,2	0	0	1,1

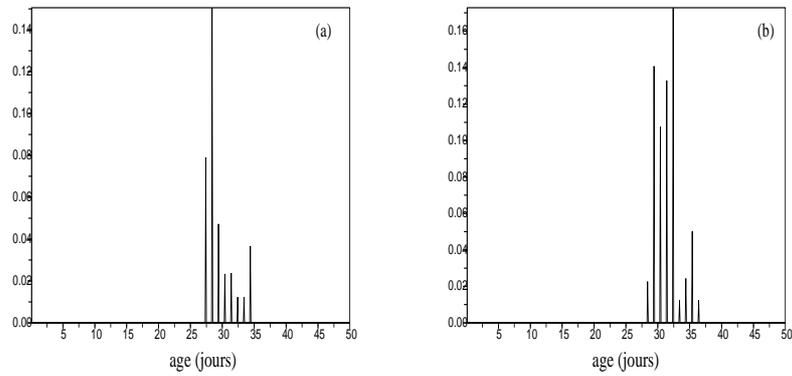
## Lambrusque

jour	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
% fem	1,2	2,4	6	15,6	7,2	7,2	6,0	2,4	3,6	1,2	1,2
% mâle	8,4	19,2	7,2	2,4	3,6	2,4	2,4	0	0	0	0

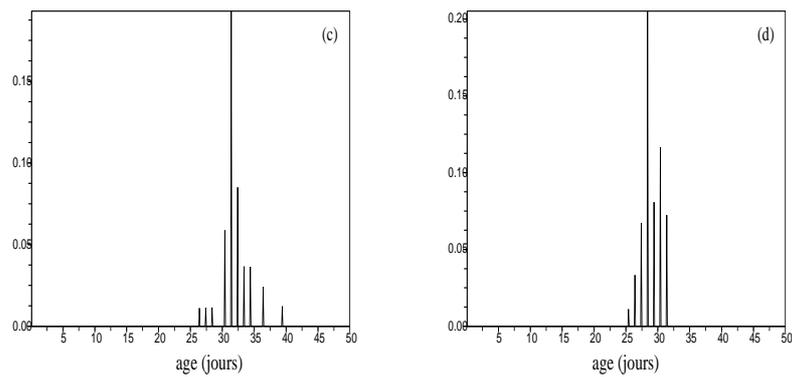
TAB. 7.5: *Dynamiques d'émergences, en pourcentage, en fonction du sexe des individus et de l'alimentation des chenilles ( pinot noir, chardonnay et lambrusque ) mesurées en conditions de laboratoire (données de Moreau et Thiéry non publiées).*

La figure 7.15 donne les dynamiques d'émergence de cohortes de larves soumises à des conditions climatiques constantes en fonction du cépage. La courbe noire est la donnée expérimentale alors que la courbe bleue est la simulation du modèle où la valeur des taux d'émergence sont donnée en 7.14. L'erreur de prédiction est inférieure à 1% pour ces 3 exemples.

## Pinot noir



## Chardonnay



## Lambrusque

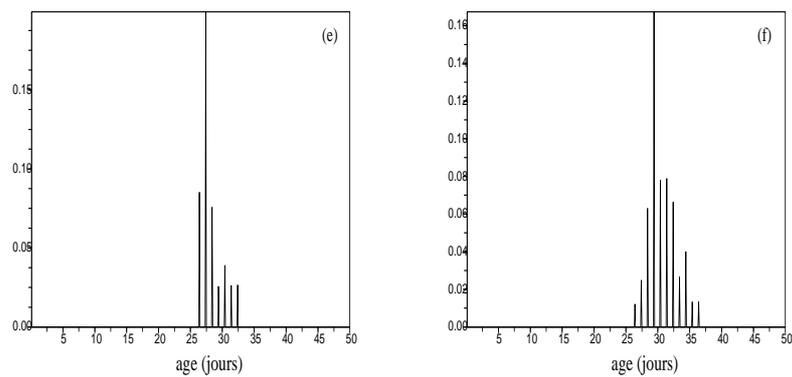
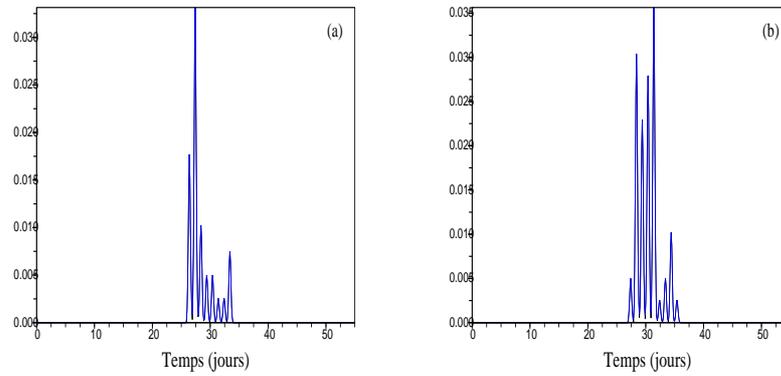
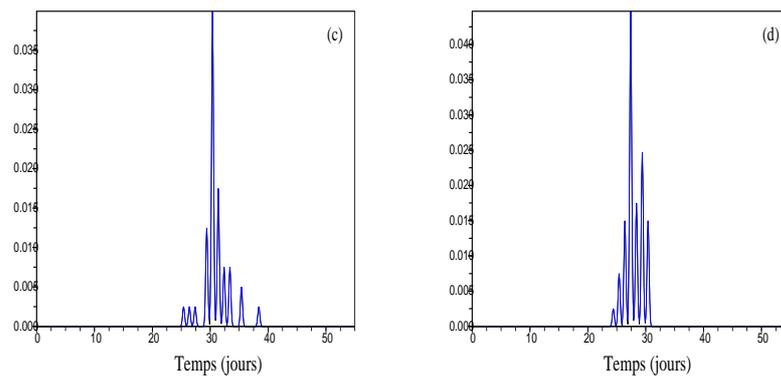


FIG. 7.14: Taux d'émergence estimé par l'algorithme de QN en fonction de l'âge. (a), (c), (e) : Taux d'émergence mâle sur respectivement pinot noir, chardonnay et lambrusque. (b), (d), (f) : Taux d'émergence femelle sur respectivement pinot noir, chardonnay et lambrusque.

## Pinot noir



## Chardonnay



## Lambrusque

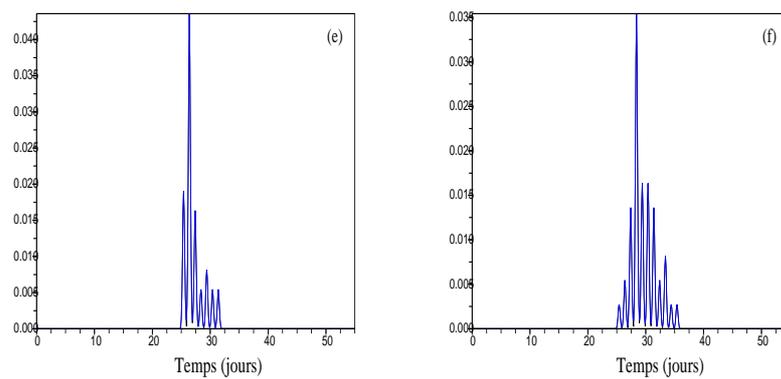


FIG. 7.15: *Dynamiques temporelles d'émergence en fonction du temps. La courbe noire est la donnée expérimentale et la courbe bleue est obtenue en calculant les équations (7.18) avec le taux estimé. (a), (c), (e) : Dynamiques d'émergence des mâles sur respectivement pinot noir, chardonnay et lambrusque. (b), (d), (f) : Dynamiques d'émergence des femelles sur respectivement pinot noir, chardonnay et lambrusque.*

## Chapitre 8

# Estimation du taux de ponte.

Dans ce chapitre, on détermine le taux de ponte selon l'âge de la femelle. Pour cela, on utilise les dynamiques de ponte mesurées en conditions de laboratoire. Ces expériences démarrent avec une population de femelles de même âge. Elles sont mises à l'accouplement pendant 48h puis isolées dans un tube à essai pour contrôler la ponte. Les oeufs sont alors comptabilisés tous les jours jusqu'à la mort de la femelle. De ces informations, on déduit le problème mathématique pour l'estimation du taux de ponte  $\beta^f$ . Le développement dans le temps des femelles est modélisé par l'équation hyperbolique suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u^f(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} u^f(t, a) = 0, & (t, a) \in [0, T] \times [0, L], \\ u^f(0, a) = u_0^f(a), & a \in [0, L] \\ u^f(t, 0) = 0, & t \in [0, T] \end{cases} \quad (8.1)$$

où  $u^f(t, a)$  est la densité de femelles à l'âge  $a$  et à l'instant  $t$ . L'âge maximal de vie des femelles est égal à  $L$  et le temps final de l'expérience est  $T$ . La dynamique temporelle de la ponte est donnée par la relation

$$q_{exp}(t) = \int_0^L \beta^f(a) u^f(t, a) da, \quad t \in [0, T], \quad (8.2)$$

où  $q_{exp}$  correspond à la donnée expérimentale. Seules les femelles vivantes sont considérées dans cette expérience. Le problème mathématique consiste à identifier le taux de fécondité  $\beta^f$  vérifiant l'équation (8.2). La densité de femelles est donnée, en résolvant le système (8.1) par la méthode des caractéristiques, par l'équation

$$u^f(t, a) = u_0^f(a - t) \quad a > t, \quad t \in [0, T].$$

En remplaçant dans l'équation (8.2) la densité  $u^f$  par l'équation précédente, on déduit que le taux de ponte satisfait l'équation

$$q_{exp}(t) = \int_t^L \beta^f(a) u_0^f(a - t) da, \quad t \in [0, T]. \quad (8.3)$$

où  $q_{exp}$  et  $u_0^f$  sont des fonctions connues. Par une méthode des moindres carrés, on estime le taux de ponte à partir de l'équation (8.3).

## 8.1 Formulation et résolution du problème d'estimation.

Le problème d'estimation du taux de ponte est donné par

$$[P_3] \quad \text{Min}_{\beta^f \in K} \int_0^T \left[ \int_t^L \beta^f(a) u_0^f(a-t) da - q_{exp}(t) \right]^2 dt,$$

où  $K$  est l'ensemble des solutions du problème  $[P_3]$  et est donné par

$$K = \{ \beta(a) \in C^0([0, L]); 0 < \underline{\beta} \leq \beta \leq \hat{\beta} \}.$$

On note la fonction coût du problème de minimisation par  $\mathcal{J}(\beta^f)$  et on définit par  $\Omega$  le domaine  $[0, L] \times [0, T]$ .

**Théorème 12** *Le problème  $[P_3]$  admet un unique optimum.*

Preuve : A l'aide des suites minimisantes, on montre que le problème  $[P_3]$  admet au moins une solution (voir preuve du théorème 3). Soient  $\beta_1^f$  et  $\beta_2^f$  deux solutions du problème de minimisation  $[P_3]$ . La dérivée de la fonction coût aux points  $\beta_1^f$  et  $\beta_2^f$  est alors égale à la valeur nulle

$$\nabla \mathcal{J}(\beta_1^f) = 0, \quad \nabla \mathcal{J}(\beta_2^f) = 0.$$

La dérivée de la fonction coût par rapport à la fonction  $\beta^f$  est

$$\langle \nabla \mathcal{J}(\beta^f), h \rangle_{L^2(\Omega)} = 2 \int_0^T \left( \int_t^L \beta^f(a) u_0^f(a-t) da - q_{exp}(t) \right) \int_t^L u_0^f(a-t) h(a) da dt,$$

pour toutes fonctions  $h$  de l'espace  $L^2([0, L])$  telles que  $h(L) = h(0) = 0$ . La différence du gradient de la fonction coût entre les points  $\beta_1^f$  et  $\beta_2^f$  est égal à

$$\int_t^L (\beta_1^f(a) - \beta_2^f(a)) u_0^f(a-t) da = 0, \quad t \in [0, T].$$

La donnée initiale est non nulle sur tout le domaine  $[0, L]$ , par conséquent les fonctions  $\beta_1^f(a)$  et  $\beta_2^f(a)$  sont égales sur l'intervalle  $[0, L]$ .

## 8.2 Le problème discret.

On s'intéresse au problème discret de  $[P_3]$  pour obtenir numériquement une solution. Le maillage utilisé est celui défini dans le chapitre 5. L'intervalle  $[0, T]$  est subdivisé en  $N_t + 1$  points  $t^n$  qui sont donnés par

$$t^n = n\Delta t, \quad n = 0, N_t.$$

L'intervalle des âges est discrétisé en  $N_a + 1$  points avec la décomposition suivante

$$[0, L] = \cup_i [a_{i-\frac{1}{2}}, a_{i+\frac{1}{2}}], \quad i = 0, N_a,$$

où les points à la maille  $i + \frac{1}{2}$  sont donnés par la formule

$$a_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})\Delta a, \quad i = 0, N_a - 1,$$

et  $\Delta a$  est le pas de discrétisation en âge. Le problème discret s'écrit sur ce maillage

$$[P_3]_{\Delta} : \quad \text{Min}_{\beta_{\Delta}^f \in K_{\Delta}} \left( \mathcal{J}_{\Delta}(\beta_{\Delta}^f) = \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \left[ \Delta a \sum_{i=n}^{N_a} \beta_i^f u_{0,i-n}^f - q_{exp}^n \right]^2 \right)$$

où  $q_{exp}^n$  est l'approximation de la fonction  $q_{exp}$  pour  $t$  appartenant dans l'intervalle  $[t^n, t^{n+1}[$  pour tous  $n$  strictement positif, et  $u_{0,i}^f$  est la valeur approchée de la donnée initiale  $u_0^f$  où  $a$  appartient à l'intervalle  $[a_{i-\frac{1}{2}}, a_{i+\frac{1}{2}}[$  pour tous  $i$  allant de 0 à  $N_a$ . La solution approchée du taux de ponte est notée  $\beta_{\Delta}^f$ . On cherche la solution du problème  $[P_3]_{\Delta}$  dans l'espace  $K_{\Delta}$  qui est défini par

$$K_{\Delta} = \{ \beta(a) = \beta_i > 0, \quad a \in [a_{i-\frac{1}{2}}, a_{i+\frac{1}{2}}[, \quad i = 0, N_a \}.$$

**Théorème 13** *Le problème  $[P_3]_{\Delta}$  admet une unique solution.*

**Preuve :** Le gradient de la fonction coût est

$$G_i = 2\Delta t \Delta a \sum_{n=0}^i u_{0,i-n}^f \left[ \Delta a \sum_{j=n}^{N_a} \beta_j^f u_{0,j-n}^f - q_{exp}^n \right], \quad (8.4)$$

pour  $i$  allant de 0 à  $N_a$ . Le vecteur  $\beta_{\Delta}^f$  est un optimum si et seulement si  $G_i$  est nul pour tous  $i$  de 0 à  $N_a$ . Les équations pour  $G_{j < i}$  à l'optimum sont utilisées dans le calcul de  $G_i$  au point  $\beta_{\Delta}^f$  qui vérifie alors le système

$$\Delta a \sum_{j=i}^{N_a} \beta_j^f u_{0,j-i}^f = q_{exp}^i, \quad i = 0, N_a.$$

La forme matricielle de ce système est

$$\begin{pmatrix} u_{0,0}^f & \dots & \dots & u_{0,N_a}^f \\ 0 & u_{0,0}^f & \dots & u_{0,N_a-1}^f \\ 0 & 0 & u_{0,0}^f & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{0,0}^f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0^f \\ \vdots \\ \beta_{N_a}^f \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta a} \begin{pmatrix} q_{exp}^0 \\ \vdots \\ q_{exp}^{N_a} \end{pmatrix}$$

On note  $U^f$  la matrice triangulaire supérieure à coefficients strictement positifs. Le vecteur  $\beta_{\Delta}^f$  est calculé par la relation

$$\beta_{\Delta}^f = \frac{1}{\Delta a} (U^f)^{-1} Q_{exp}.$$

où  $Q_{exp}$  est le vecteur  $(q_{exp}^0, \dots, q_{exp}^{N_a})^T$ .

### 8.2.1 Résultats numériques.

On résout le problème d'estimation  $[P_3]_{\Delta}$  avec l'algorithme de Quasi-Newton (QN) défini dans le chapitre 6. Le gradient de la fonction coût est donné par l'équation (8.4). On choisit de se construire une dynamique expérimentale  $q_{exp}$  en résolvant l'équation (8.3) et à partir d'un taux de ponte donné  $\beta_{ex}^f$ . L'objectif est de trouver un unique taux de ponte pour cette dynamique de ponte expérimentale en résolvant le problème d'estimation. La solution obtenue par l'algorithme

de minimisation est notée  $\beta_{app}^f$ .

On présente dans la figure 8.1 deux résultats qui sont obtenus avec une donnée initiale égal à une gaussienne centrée en l'âge 1 et de largeur 0.25 et un taux de ponte égal à une gaussienne centrée en l'âge 3, d'amplitude 1 et de largeur 0.5. L'âge maximal du stade adulte est fixé à 10. Le premier résultat est obtenu sans régularisation de la solution (graphe (a) de la figure 8.1) alors que le deuxième est la solution du problème  $[P_3]$  en régularisant le taux de ponte avec sa norme minimale et sa norme minimale de sa dérivée seconde (graphe (b) de la figure 8.1 (b)).

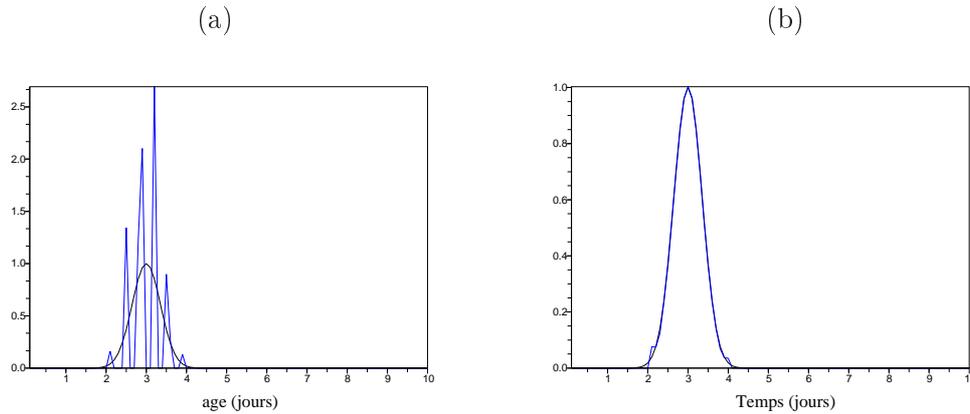


FIG. 8.1: Taux de ponte en fonction de l'âge. La courbe noire est la solution exacte alors que la courbe bleue est la solution du problème d'estimation  $[P_3]$  avec la méthode (QN). (a) la solution n'est pas régularisée. (b) la solution est régularisée avec sa norme  $L^2$  minimale et sa norme  $L^2$  minimale de sa dérivée seconde.

Le problème d'estimation  $[P_3]$  a une unique solution si on impose des conditions de régularité sur la solution. Les oscillations de la solution du problème d'estimation (graphe (a) de la figure 8.1) sont dues à la résolution de l'algorithme de Quasi-Newton (voir chapitre 6). La valeur de la fonction coût pour ces deux solutions mais aussi l'erreur entre la dynamique de ponte expérimentale et la dynamique de ponte calculée avec la solution sont données dans le tableau 8.1.

Figure 8.1	(a)	(b)
$\eta$	0	$0,110^{-7}$
$\gamma$	0	$0,110^{-7}$
$\mathcal{J}_\Delta(\beta_{app}^f)$	$5,0310^{-5}$	$5,1310^{-7}$
$\ q_{exp} - q_{app}\ _\infty$	$6,9710^{-3}$	$1,2410^{-3}$
$\eta \ \beta_{app}^f\ _2^2$	0	$6,2610^{-9}$
$\gamma \ \partial_a^2 \beta_{app}^f\ _2^2$	0	$4,7510^{-7}$

TAB. 8.1: valeur de la fonction coût, de l'erreur maximale entre la dynamique de ponte expérimentale et la dynamique de ponte calculée pour les deux solutions de la figure 8.1.

### 8.3 Application aux données expérimentales.

On applique la méthode d'estimation du taux de ponte présenté au dessus sur un jeu de données expérimentales. La dynamique de ponte  $q_{exp}$  qu'on utilise vient de mesures faites sur des femelles d'élevage de l'UMR Santé Végétale et n'est pas publié. La ponte de ces femelles dure en moyenne 7 jours avec un nombre d'oeufs qui décroît au cours de la ponte et commence 24h après l'accouplement. On ajuste cette dynamique de ponte sur un pas de mesures de 2h40 afin de pouvoir l'utiliser dans l'algorithme de minimisation. On propose de répartir la ponte des femelles d'une journée de deux façons. La première consiste à centrer la ponte en fin de journée. Dans ce cas, la dynamique de ponte résultante ressemble à la courbe (b) de la figure 8.2, c'est à dire à une succession de pics gaussiens. La deuxième façon de distribuer la ponte est de la répartir équitablement sur la journée. Dans ce cas, la dynamique de ponte ressemble à la courbe (d) de la figure 8.2, c'est à dire à une fonction constante par morceaux. Le taux de ponte calculé par l'algorithme de minimisation pour ces deux dynamiques de ponte est donné respectivement sur les graphes (a) et (c) de la figure 8.2.

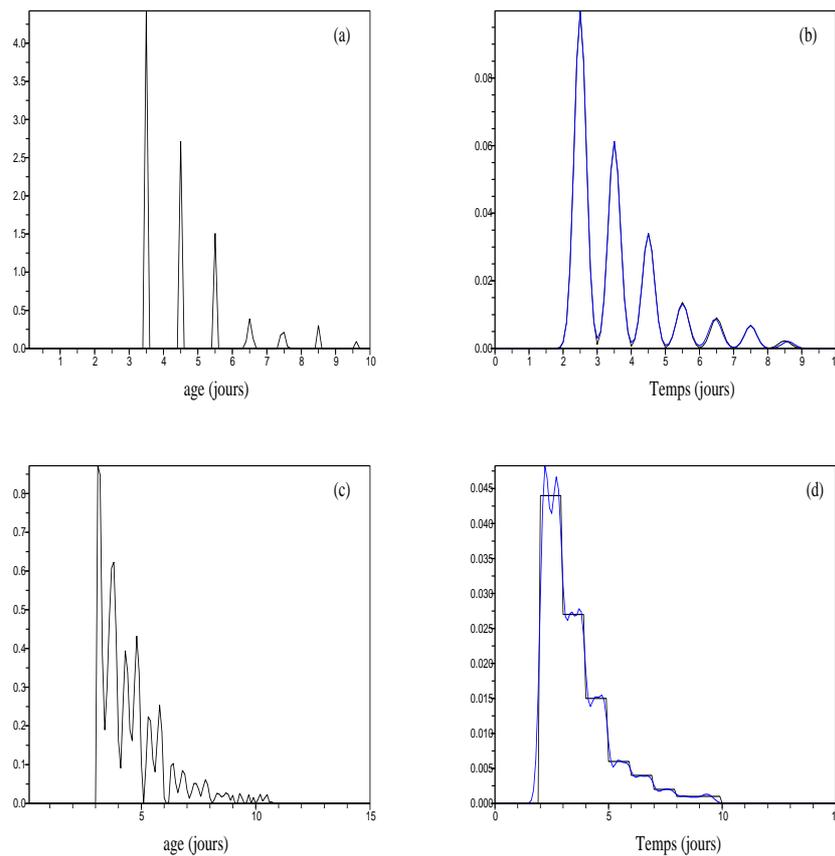


FIG. 8.2: Graphes (a) et (c) : taux de ponte calculé par l'algorithme de QN pour le problème  $[P_3]$  en fonction de l'âge. Graphes (b) et (d) : dynamiques de ponte en fonction du temps. La courbe noire est la donnée expérimentale et la courbe bleue est obtenue avec le taux de ponte estimé à partir de l'équation (8.3).

Le taux de ponte estimé est la somme de fonctions Diracs lorsque la dynamique de ponte est une somme de fonctions gaussiennes. Ce taux est une fonction qui oscille avec des variations

qui diminuent en fonction que l'âge augmente lorsque la dynamique de ponte est une fonction constante par morceaux.

En fonction du comportement de ponte de la femelle, on peut connaître, en résolvant le problème  $[P_3]$ , son âge de ponte. Cette information peut s'avérer utile pour les biologistes afin de mettre au point des méthodes de lutte contre l'Eudémis de la vigne ou bien contre d'autres ravageurs aux caractéristiques biologiques très proches. Le premier taux de ponte sera utilisé dans l'étude de la dynamique des populations de l'Eudémis.

## Chapitre 9

# Estimation des taux de mortalité.

Dans cette partie, on estime les fonctions de mortalité en fonction de l'âge des individus. En particulier, on détermine les taux de mortalité des stades oeuf  $m^e$ , larvaire  $m^l$  et papillon  $m^p$  du modèle suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u^e(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial u^e(t,a)}{\partial a} = -(\beta^e(a) + m^e(a))u^e(t,a), & a \in [0, L^e], \quad t > 0, \\ \frac{\partial u^l(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial u^l(t,a)}{\partial a} = -(\beta^l(a) + m^l(a))u^l(t,a), & a \in [0, L^l], \quad t > 0, \\ \frac{\partial u^p(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial u^p(t,a)}{\partial a} = -m^p(a)u^p(t,a), & a \in [0, L^p], \quad t > 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Les fonctions  $\beta^e$  et  $\beta^l$  sont respectivement le taux d'éclosion et le taux d'émergence. Ces fonctions sont définies sur les domaines  $[0, L^e]$  et  $[0, L^l]$  où  $L^e$  et  $L^l$  sont respectivement les âges maximaux de vie des populations oeuf et larvaire. Les conditions de renouvellement du système (9.1) sont données par

$$\begin{cases} u^e(t, 0) = \int_0^{L^p} \beta^p(a)u^p(t, a)da, & t > 0, \\ u^l(t, 0) = \int_0^{L^e} \beta^e(a)u^e(t, a)da, & t > 0, \\ u^p(t, 0) = \int_0^{L^l} \beta^l(a)u^l(t, a)da, & t > 0, \end{cases} \quad (9.2)$$

où  $\beta^p$  est le taux de fécondité défini sur le domaine  $[0, L^p]$  et  $L^p$  est l'âge maximal de vie des papillons. Les conditions initiales des équations du système (9.1) sont

$$u^k(0, a) = u_0^k(a), \quad a \in [0, L^k], \quad k = e, l, p. \quad (9.3)$$

Le problème (9.1)-(9.2)-(9.3) s'apparente au modèle de Rundell traité dans l'article (1993) qui s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t, a) + \frac{\partial}{\partial a}u(t, a) = -m(a)u(t, a), & a \in [0, L], \quad t > 0 \\ u(t, 0) = \int_0^L \beta(a)u(t, a)da, & t > 0 \\ u(0, a) = u_0(a), & a \in [0, L] \end{cases} \quad (9.4)$$

où  $u(t, a)$  est la densité d'individus d'une population à l'instant  $t$  et à l'âge  $a$ . Les fonctions  $\beta$ ,  $m$  sont le taux de fécondité et le taux de mortalité à l'âge  $a$  de cette population. La constante  $L$  est l'âge maximal de vie de la population. Appliquées à une population d'Eudémis, ces équations modélisent le vieillissement des individus sur tout le cycle de développement, c'est à dire sur les stades oeuf, larve et papillon. L'âge maximal de vie  $L$  représente la somme des âges maximal de vie des stades oeuf, larve et papillon.

Pour ce modèle (9.4) Rundell montre, à partir d'une donnée expérimentale  $\psi$  explicitée en fonction de l'âge de la population et obtenue à l'instant  $T$ , l'existence unique du taux de mortalité. La fonction de mortalité  $m$  est prise singulière c'est à dire qu'elle satisfait la condition

$$\int_0^L m(a)da = +\infty.$$

Rundell précise que la condition de non nullité de la fonction de renouvellement  $u(t, 0)$  est essentielle pour assurer ce résultat.

Bien que la structure mathématique du modèle (9.1) et du modèle utilisé par Rundell est différente, on s'inspire du travail de Rundell pour montrer l'existence unique des taux de mortalité des stades de développement oeuf, larve et papillon. Pour cela, on se donne des mesures expérimentales  $\psi^k$  sur la distribution en âge de la population à l'instant  $T$  en fonction du stade de développement  $k$ . Ces données sont égales à

$$u^k(T, a) = \psi^k(a), \quad a \in [0, L^k], \quad k = e, l, p. \quad (9.5)$$

Avant d'énoncer le théorème d'existence et d'unicité des taux de mortalité pour le problème (9.1)-(9.2)-(9.3)-(9.5), on formule les hypothèses sur les fonctions démographiques et sur les observations nécessaire à l'obtention de ce résultat.

**H 9** *Le temps de l'observation est pris dans l'intervalle  $[L^e + L^l, L^e + L^l + L^p]$ . Les fonctions  $\psi^k(a)$  sont continues et non négatives sur l'intervalle  $[0, L^k]$  pour  $k$  égal à  $e, l, f$ .*

**H 10** *Les fonctions de mortalité  $m^k$  sont non négatives sur  $[0, L^k]$ , bornées localement et vérifient*

$$\int_0^{L^k} m^k(a)da = +\infty, \quad k = e, l, p.$$

**H 11** *Les fonctions  $\beta^k(a)$  pour  $k = e, l, p$  sont bornées et non négatives sur  $[0, L^k]$  pour  $k$  égal à  $e, l, f$ .*

**H 12** *Les données initiales  $u_0^k$  sont des fonctions non négatives dans l'espace  $L^2([0, L^k])$  pour  $k$  égal à  $e, l, f$ .*

Le théorème d'existence et d'unicité des taux de mortalité est le suivant

**Théorème 14** *On suppose que les hypothèses (H9)-(H10)-(H11)-(H12) sont vérifiées et que les fonctions  $m^l$  et  $m^p$  sont connues. Le problème (9.1)-(9.2)-(9.3)-(9.5) admet alors un unique taux de mortalité oeuf  $m^e$ .*

Ce théorème est valable pour démontrer l'existence unique de la fonction  $m^l$  en connaissant les taux de mortalité oeuf et papillon, mais aussi pour démontrer l'existence unique de la fonction  $m^p$  avec les fonctions de mortalité oeuf et larve connues.

**Preuve :** Soient les vecteurs  $u = (u^e, u^l, u^p)$ ,  $v = (v^e, v^l, v^p)$ ,  $m = (m^e, m^l, m^p)$  et  $\lambda = (\lambda^e, \lambda^l, \lambda^p)$ . On suppose que les couples de fonctions  $(u, m)$  et  $(v, \lambda)$  vérifient les équations (9.5) et le problème (9.1)-(9.2)-(9.3). On définit les variables suivante

$$\bar{u}(t, a) = u^e(t, a) - v^e(t, a), \quad \bar{v}(t, a) = u^l(t, a) - v^l(t, a), \quad \bar{w}(t, a) = u^p(t, a) - v^p(t, a).$$

Ces fonctions calculent la différence entre les solutions  $u$  et  $v$  pour tous les temps  $t$  et les âges  $a$ . On dénote par  $\bar{m}$  la différence entre les fonctions de mortalité  $m^e$  et  $\lambda^e$ . On montre que cette fonction est nulle sur tout le domaine en âge  $[0, L^e]$ .

Les fonctions  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$  vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} \bar{u}(t, a) + \beta^e(a) \bar{u}(t, a) = -m^e(a) \bar{u}(t, a) - v^e(t, a) \bar{m}, & a \in [0, L^e], \quad t > 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} \bar{v}(t, a) + \beta^l(a) \bar{v}(t, a) = -m^l(a) \bar{v}(t, a), & a \in [0, L^l], \quad t > 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{w}(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} \bar{w}(t, a) = -m^p(a) \bar{w}(t, a), & a \in [0, L^p], \quad t > 0, \end{cases} \quad (9.6)$$

avec les conditions de renouvellement suivante

$$\begin{cases} \bar{u}(t, 0) = \int_0^L \beta^f \bar{w}(t, a) da, & t > 0, \\ \bar{v}(t, 0) = \int_0^L \beta^e \bar{u}(t, a) da, & t > 0, \\ \bar{w}(t, 0) = \int_0^L \beta^l \bar{v}(t, a) da, & t > 0. \end{cases} \quad (9.7)$$

Ces fonctions ont une valeur nulle à l'instant initial et au moment des observations  $T$

$$\begin{cases} \bar{u}(0, a) = \bar{u}(T, a) = 0, & a \in [0, L^e], \\ \bar{v}(0, a) = \bar{v}(T, a) = 0, & a \in [0, L^l], \\ \bar{w}(0, a) = \bar{w}(T, a) = 0, & a \in [0, L^p]. \end{cases} \quad (9.8)$$

Soient  $\xi^e$ ,  $\xi^l$  et  $\xi^p$  les variables duales des fonctions  $u^e$ ,  $u^l$  et  $u^p$  respectivement. Ces fonctions vérifient le système

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} \xi^e(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} \xi^e(t, a) + \beta^e(a) \xi^e(t, a) = -m^e(a) \xi^e(t, a) + \beta^e \xi^l(t, 0), & a \in [0, L^e], \quad t > 0, \\ -\frac{\partial}{\partial t} \xi^l(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} \xi^l(t, a) + \beta^l(a) \xi^l(t, a) = -m^l(a) \xi^l(t, a) + \beta^l \xi^p(t, 0), & a \in [0, L^l], \quad t > 0, \\ -\frac{\partial}{\partial t} \xi^p(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} \xi^p(t, a) = -m^p(a) \xi^p(t, a) + \beta^p \xi^e(t, 0), & a \in [0, L^p], \quad t > 0, \end{cases} \quad (9.9)$$

avec les conditions au temps maximal  $T$  et à l'âge maximal suivante

$$\begin{cases} \xi^e(t, L^e) = \xi^l(t, L^l) = \xi^p(t, L^p) = 0, & t > 0, \\ \xi^e(T, a) = \theta^e(a), & a \in [0, L^e], \\ \xi^l(T, a) = \theta^l(a), & a \in [0, L^l], \\ \xi^p(T, a) = \theta^p(a), & a \in [0, L^p], \end{cases} \quad (9.10)$$

où  $\theta^k$  sont des fonctions positives de l'espace  $L^2([0, L^k])$  pour  $k$  égal à  $e, l, p$ . Par la méthode des caractéristiques, on explicite la solution du problème (9.9)-(9.10) qui est donnée par

$$\begin{cases} \xi^e(t, a) = \theta^e(a - t + T) e^{-\int_a^{a-t+T} (\beta^e + m^e)(s) ds} \\ \quad + \int_t^T \beta^e(a) \xi^l(s, 0) e^{-\int_t^s (\beta^e + m^e)(\tau) d\tau} ds, \\ \xi^l(t, a) = \theta^l(a - t + T) e^{-\int_a^{a-t+T} (\beta^l + m^l)(s) ds} \\ \quad + \int_t^T \beta^l(a) \xi^p(s, 0) e^{-\int_t^s (\beta^l + m^l)(\tau) d\tau} ds, \\ \xi^p(t, a) = \theta^p(a - t + T) e^{-\int_a^{a-t+T} m^p(s) ds} \\ \quad + \int_t^T \beta^p(a) \xi^e(s, 0) e^{-\int_t^s m^p(\tau) d\tau} ds, \end{cases} \quad (9.11)$$

pour  $a \leq t - T$  et  $t$  strictement positif. Quelque soit la valeur de  $\beta^k$  pour  $k$  égal à  $e, l, p$  en l'âge 0, les trois équations de (9.11) sont non négatives et intégrables sur le domaine  $[0, L^k]$ ,  $k$  égal à  $e, l, p$ , pour tous  $t$  strictement positif. La première équation de (9.6) est multipliée par  $\xi^e$  puis

intégrée sur le domaine  $[0, L^e] \times [0, T]$ , où  $T$  correspond au temps de l'observation. De la même manière, la deuxième et la troisième équation de (9.6) sont respectivement multipliées par  $\xi^l$  et  $\xi^p$  puis intégrées sur les domaines  $[0, L^l] \times [0, T]$  et  $[0, L^p] \times [0, T]$ . On déduit alors après quelques simplifications le système suivant

$$\begin{cases} - \int_0^T \bar{u}(t, 0) \xi^e(t, 0) dt + \int_0^T \int_0^{L^e} \beta^e(a) \xi^l(t, 0) \bar{u}(t, a) da dt = \\ \quad - \int_0^T \int_0^{L^e} v^e(t, a) \xi^e(t, a) \bar{m}(a) da dt \\ - \int_0^T \bar{v}(t, 0) \xi^l(t, 0) dt + \int_0^T \int_0^{L^l} \beta^l(a) \xi^p(t, 0) \bar{v}(t, a) da dt = 0 \\ - \int_0^T \bar{w}(t, 0) \xi^p(t, 0) dt + \int_0^T \int_0^{L^p} \beta^p(a) \xi^e(t, 0) \bar{w}(t, a) da dt = 0 \end{cases} \quad (9.12)$$

Le deuxième terme à gauche de l'égalité des trois équations s'écrit, en utilisant la définition de la condition de renouvellement des densités  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$

$$\begin{cases} - \int_0^T \bar{u}(t, 0) \xi^e(t, 0) dt + \int_0^T \xi^l(t, 0) \bar{v}(t, 0) dt = \\ \quad - \int_0^T \int_0^{L^e} v^e(t, a) \xi^e(t, a) \bar{m}(a) da dt \\ - \int_0^T \bar{v}(t, 0) \xi^l(t, 0) dt + \int_0^T \xi^p(t, 0) \bar{w}(t, 0) dt = 0 \\ - \int_0^T \bar{w}(t, 0) \xi^p(t, 0) dt + \int_0^T \xi^e(t, 0) \bar{u}(t, 0) dt = 0 \end{cases} \quad (9.13)$$

La somme de ces équations donne

$$\int_0^T \int_0^{L^e} v^e(t, a) \xi^e(t, a) \bar{m}(a) da dt = 0$$

On pose

$$f^e(a) = \int_0^T v^e(t, a) \xi^e(t, a) dt, \quad a \in [0, L],$$

tel que l'équation du dessus s'écrive

$$\int_0^{L^e} f^e(a) \bar{m}(a) da = 0$$

En posant  $\theta^e(a) = a^n$  pour  $a \in [0, L^e]$  et  $n \geq 0$  et en utilisant le théorème de continuité des fonctions intégrales, on en déduit que la fonction  $f^e$  est continue et non nulle pour tous  $a \in [0, L^e]$ . Grâce au Lemme 2.1. de l'article de Rundell (1993), et des propriétés sur les fonctions de mortalité  $m^e$  et  $\lambda^e$ , on déduit que le terme  $\bar{m}$  est nul, autrement dit que  $m^e = \lambda^e$ .

Dans le théorème (15), l'existence unique du taux de mortalité oeuf repose sur la connaissance des taux de mortalité larve et papillon mais aussi sur la connaissance des distributions en âge des individus  $\psi^k$  pour chaque stade de développement  $k$ . Chez les populations Eudémis, la pyramide des âges est mesurée pendant le stade larvaire et ne l'est pas pendant les stades oeuf et papillon.

**Théorème 15** *Soit la fonction  $\psi^l(a)$  définie non négative sur l'intervalle  $[0, L^l]$  et correspondant à la distribution en âge des larves à l'instant  $T$ . Soient les hypothèses (H10)-(H11)-(H12) vérifiées et les fonctions  $m^l$  et  $m^p$  connues. Le problème (9.1)-(9.2)-(9.3)-(9.5) admet alors un unique taux de mortalité oeuf  $m^e$ .*

**Preuve :** La preuve est basée sur les calculs développés dans la preuve du théorème précédent.

## 9.1 Formulation et résolution du problème d'estimation.

Le problème d'estimation des taux de mortalité s'écrit

$$[\mathbf{P}_4] \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{m \in K^3} \int_0^{L^e} [u^e(T, a) - \psi^e(a)]^2 da + \int_0^{L^l} [u^l(T, a) - \psi^l(a)]^2 da \\ + \int_0^{L^p} [u^p(T, a) - \psi^p(a)]^2 da \\ \text{où les fonctions } u^e, u^l \text{ et } u^p \text{ sont données par (9.1)-(9.2)-(9.3)} \end{array} \right.$$

La fonction  $m$  correspond au vecteur  $(m^e, m^l, m^p)$ . L'ensemble des solutions admissibles  $K$  est défini par

$$K = \{f(a) \in C^0([0, L]); f(a) > 0 \text{ et } \int_0^L f(a) da = \infty\}.$$

La fonction coût de ce problème d'estimation est notée  $\mathcal{J}(m)$ .

**Théorème 16** *Le problème  $[\mathbf{P}]_4$  admet au moins un optimum.*

**Preuve :** Pour toute valeur de l'optimum  $m$  de l'espace  $K^3$ , la fonction coût admet une borne inférieure finie ou nulle. Soient  $d$  la borne inférieure de la fonction coût et  $\{m_n\}$ , où  $n$  est un entier non nul, une suite minimisante telle que

$$d < \mathcal{J}(m_n) \leq d + \frac{1}{n}. \quad (9.14)$$

La valeur de la fonction coût pour cet optimum  $\{m_n\}$  est donnée par

$$\mathcal{J}(m_n) = \int_0^{L^e} [u_n^e(T, a) - \psi^e(a)]^2 da + \int_0^{L^l} [u_n^l(T, a) - \psi^l(a)]^2 da + \int_0^{L^p} [u_n^p(T, a) - \psi^p(a)]^2 da$$

où les densités sont calculées à partir des équations du système (9.1) avec une fonction de mortalité égale à  $\{m_n\}$ . Soit  $L_\epsilon^j$  un âge plus petit que  $L^j$  et où  $\epsilon$  est un paramètre positif petit tel que

$$|L^j - L_\epsilon^j| \leq \epsilon \text{ pour tous } j = e, l, p.$$

Sur le domaine  $[0, L_\epsilon^j]$ , les fonctions de mortalité sont continues. On déduit alors que la suite  $\{m_n\}$  est bornée, par conséquent il existe une sous suite  $\{m_{n_k}\}_k$  de  $\{m_n\}_n$  qui converge faiblement vers  $m^*$  dans l'espace  $L^2([0, L_\epsilon^j])$ , pour tous  $j = e, l, p$ . Les densités  $u^e, u^l$  et  $u^p$  sont dépendantes de la suite  $\{m_{n_k}\}_k$ , et sont données par respectivement

$$\begin{aligned} u_{n_k}^e(t, a) &= \begin{cases} u_0^e(a-t) e^{-\int_{a-t}^a (\beta^e(s) + m_{n_k}^e(s)) ds}, & a > t, \\ u^e(t-a, 0) e^{-\int_0^a (\beta^e(s) + m_{n_k}^e(s)) ds}, & a \leq t, \end{cases} \\ u_{n_k}^l(t, a) &= \begin{cases} u_0^l(a-t) e^{-\int_{a-t}^a (\beta^l(s) + m_{n_k}^l(s)) ds}, & a > t, \\ u^l(t-a, 0) e^{-\int_0^a (\beta^l(s) + m_{n_k}^l(s)) ds}, & a \leq t, \end{cases} \\ u_{n_k}^p(t, a) &= \begin{cases} u_0^p(a-t) e^{-\int_{a-t}^a m_{n_k}^p(s) ds}, & a > t, \\ u^p(t-a, 0) e^{-\int_0^a m_{n_k}^p(s) ds}, & a \leq t. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.15)$$

Ces suites sont bornées dans l'espace  $L^2([0, L_\epsilon^j])$ . La suite  $\{m_{n_k}\}$  converge faiblement vers  $m^*$  et les bornes des domaines en âge et en temps sont finies, on déduit alors que

$$\int_{a-t}^a m_{n_k}^j(s) ds \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{a-t}^a m_*^j(s) ds, \quad a \in [0, L_\epsilon^j], \quad j = e, l, p. \quad (9.16)$$

Par conséquent, les suites de fonction  $\{u_{n_k}^j\}_k$  pour  $j = e, l, p$  convergent vers les limites  $u_*^j$  qui sont données par

$$\begin{aligned} u_*^e(t, a) &= \begin{cases} u_0^e(a-t)e^{-\int_{a-t}^a(\beta^e(s)+m_*^e(s))ds}, & a > t, \\ u^e(t-a, 0)e^{-\int_0^a(\beta^e(s)+m_*^e(s))ds}, & a \leq t, \end{cases} \\ u_*^l(t, a) &= \begin{cases} u_0^l(a-t)e^{-\int_{a-t}^a(\beta^l(s)+m_*^l(s))ds}, & a > t, \\ u^l(t-a, 0)e^{-\int_0^a(\beta^l(s)+m_*^l(s))ds}, & a \leq t, \end{cases} \\ u_*^p(t, a) &= \begin{cases} u_0^p(a-t)e^{-\int_{a-t}^a m_*^p(s)ds}, & a > t, \\ u^p(t-a, 0)e^{-\int_0^a m_*^p(s)ds}, & a \leq t. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.17)$$

où  $a$  est dans l'intervalle  $[0, L_\epsilon^j]$  pour  $j$  égal à  $e, l, p$ . Sur le domaine  $[L_\epsilon^j, L^j]$ , les fonctions de mortalité ne sont pas bornées, par conséquent les densités  $u_{n_k}^j$ , pour  $j = e, l, p$ , tendent vers la valeur nulle pour tout  $t$  dans  $[0, T]$ . En utilisant le résultat (9.16), on déduit que les limites  $u_*^j$  sont nulles sur le domaine  $[L_\epsilon^j, L^j]$  pour  $t$  dans  $[0, T]$ . Finalement, on conclut la preuve de la façon suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(m_{n_k}) &= \\ &\int_0^{L_\epsilon^e} [u_{n_k}^e(T, a) - \psi^e(a)]^2 da + \int_0^{L_\epsilon^l} [u_{n_k}^l(T, a) - \psi^l(a)]^2 da + \int_0^{L_\epsilon^p} [u_{n_k}^p(T, a) - \psi^p(a)]^2 da \\ &+ \int_{L_\epsilon^e}^{L^e} [u_{n_k}^e(T, a) - \psi^e(a)]^2 da + \int_{L_\epsilon^l}^{L^l} [u_{n_k}^l(T, a) - \psi^l(a)]^2 da + \int_{L_\epsilon^p}^{L^p} [u_{n_k}^p(T, a) - \psi^p(a)]^2 da \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^{L_\epsilon^e} [u_*^e(T, a) - \psi^e(a)]^2 da + \int_0^{L_\epsilon^l} [u_*^l(T, a) - \psi^l(a)]^2 da + \int_0^{L_\epsilon^p} [u_*^p(T, a) - \psi^p(a)]^2 da \\ &\int_{L_\epsilon^e}^{L^e} [\psi^e(a)]^2 da + \int_{L_\epsilon^l}^{L^l} [\psi^l(a)]^2 da + \int_{L_\epsilon^p}^{L^p} [\psi^p(a)]^2 da. \end{aligned}$$

Pour  $\epsilon$  proche de la valeur 0, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(m_{n_k}) &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^{L_\epsilon^e} [u_*^e(T, a) - \psi^e(a)]^2 da \\ &+ \int_0^{L_\epsilon^l} [u_*^l(T, a) - \psi^l(a)]^2 da + \int_0^{L_\epsilon^p} [u_*^p(T, a) - \psi^p(a)]^2 da \\ &= \mathcal{J}(m^*) = d \end{aligned} \quad \square$$

Pour résoudre le problème  $[P_4]$ , on étudie la fonction Lagrangienne. Soient  $p$  et  $h$  les variables de Lagrange. La première variable  $p$  est définie par  $(p^e, p^l, p^p)$  et la seconde variable est égale à

$(h^e, h^l, h^p)$ . Le Lagrangien est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S) = & \mathcal{J}(m) + \int_0^T \int_0^{L^e} [\partial_t u^e + \partial_a u^e + \beta^e(a)u^e + m^e(a)u^e] p^e(t, a) da dt \\ & + \int_0^T \int_0^{L^l} [\partial_t u^l + \partial_a u^l + \beta^l(a)u^l + m^l(a)u^l] p^l(t, a) da dt \\ & + \int_0^T \int_0^{L^p} [\partial_t u^p + \partial_a u^p + m^p(a)u^p] p^p(t, a) da dt \\ & + \int_0^T \left[ u^e(t, 0) - \int_0^{L^p} \beta^p(s)u^p(t, s) ds \right] h^e(t) dt \\ & + \int_0^T \left[ u^l(t, 0) - \int_0^{L^e} \beta^e(s)u^e(t, s) ds \right] h^l(t) dt \\ & + \int_0^T \left[ u^p(t, 0) - \int_0^{L^l} \beta^l(s)u^l(t, s) ds \right] h^p(t) dt. \end{aligned}$$

où  $S$  est le vecteur  $(m, p, h)$ . Le vecteur  $S$  est un optimum de la fonction Lagrangienne  $\mathcal{L}$  si

$$\nabla \mathcal{L}(S) = 0.$$

Le calcul des dérivées du Lagrangien par rapport aux variables  $p$  à l'optimum donne le problème d'évolution (9.1). Le calcul des dérivées du Lagrangien par rapport aux variables  $h$  donnent les conditions de renouvellement de chaque fonction  $u^k$ , pour  $k$  égal à  $e, l, p$  du système (9.2). Le problème adjoint de  $[P_4]$  s'obtient en dérivant le Lagrangien par rapport aux trois variables d'état qui sont  $u^e, u^l$  et  $u^p$  et est égal au système

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} p^e(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} p^e(t, a) + \beta^e(a)p^e(t, a) + m^e(a)p^e(t, a) = \beta^e(a)p^l(t, 0), & a \in [0, L^e], \\ -\frac{\partial}{\partial t} p^l(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} p^l(t, a) + \beta^l(a)p^l(t, a) + m^l(a)p^l(t, a) = \beta^l(a)p^p(t, 0), & a \in [0, L^l], \\ -\frac{\partial}{\partial t} p^p(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} p^p(t, a) + m^p(a)p^p(t, a) = \beta^p(a)p^e(t, 0), & a \in [0, L^p], \end{cases} \quad (9.18)$$

pour  $t$  strictement positif où la valeur de ces fonctions est donnée par, à l'instant  $T$  et à l'âge  $L$

$$\begin{cases} p^e(T, a) = 2[u^e(T, a) - \psi^e(a)], & a \in [0, L^e], \\ p^l(T, a) = 2[u^l(T, a) - \psi^l(a)], & a \in [0, L^l], \\ p^p(T, a) = 2[u^p(T, a) - \psi^p(a)], & a \in [0, L^p], \\ p^e(t, L) = p^l(t, L) = p^p(t, L) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (9.19)$$

Par la méthode des caractéristiques, les équations du problème (9.18)-(9.19) admettent une solution explicite.

**Théorème 17** *Le problème (9.18)-(9.19) admet une unique solution  $(p^e, p^l, p^p)$  dans l'espace des fonctions  $L^2([0, T] \times [0, L^k])$  pour  $k$  égal à  $e, l, p$ .*

**Preuve :** Soient  $\lambda$  une constante positive et le changement de variables suivant

$$p^e(t, a) = e^{\lambda t} \tilde{p}^e(t, a), \quad p^l(t, a) = e^{\lambda t} \tilde{p}^l(t, a), \quad p^p(t, a) = e^{\lambda t} \tilde{p}^p(t, a). \quad (9.20)$$

Le problème (9.18)-(9.19) devient

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t}\tilde{p}^e(t, a) - \frac{\partial}{\partial a}\tilde{p}^e(t, a) + (\beta^e(a) + m^e(a))\tilde{p}^e(t, a) + \lambda\tilde{p}^e(t, a) = \tilde{p}^l(t, 0)\beta^e(a), & a \in [0, L^e], \\ -\partial_t\tilde{p}^l(t, a) - \partial_a\tilde{p}^l(t, a) + (\beta^l(a) + m^l(a))\tilde{p}^l(t, a) + \lambda\tilde{p}^l(t, a) = \beta^l(a)\tilde{p}^p(t, 0), & a \in [0, L^l], \\ -\partial_t\tilde{p}^p - \partial_a\tilde{p}^p + m^p\tilde{p}^p(t, a) + \lambda\tilde{p}^p(t, a) = \beta^p(a)\tilde{p}^e(t, 0), & a \in [0, L^p], \\ \tilde{p}^e(T, a) = 2[u^e(T, a) - \psi^e(a)]e^{-\lambda t}, & a \in [0, L^e], \\ \tilde{p}^l(T, a) = 2[u^l(T, a) - \psi^l(a)]e^{-\lambda t}, & a \in [0, L^l], \\ \tilde{p}^p(T, a) = 2[u^p(T, a) - \psi^p(a)]e^{-\lambda t}, & a \in [0, L^p], \\ \tilde{p}^e(t, L) = \tilde{p}^l(t, L) = \tilde{p}^p(t, L) = 0. \end{cases} \quad (9.21)$$

pour  $t$  strictement positif. A partir de ce dernier système, on se construit une application contractante.

**Lemme 16** Soit  $\wedge$  l'application définie par :

$$\begin{aligned} \wedge : L^2([0, T]) &\rightarrow L^2([0, T]) \\ \phi &\rightarrow \hat{p}^l(t, 0) \end{aligned}$$

où  $\hat{p}^l(t, 0)$  est l'unique solution de (9.21). Si  $\lambda$  satisfait la relation

$$\lambda > 2 \left( \int_0^L (\beta^l(a))^2 da \int_0^L (\beta^p(a))^2 da \int_0^L (\beta^e(a))^2 da \right)^{1/3},$$

alors  $\wedge$  est contractante.

En supposant que ce lemme est vérifié, on montre que le problème (9.21) admet une unique solution. Le changement de variables défini en (9.20) nous permet de conclure sur l'unicité des fonctions  $p^e$ ,  $p^l$  et  $p^p$ .

**Preuve du lemme :** Soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  des fonctions de l'espace  $L^2([0, T])$  vérifiant le problème

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t}\tilde{p}_i^e(t, a) - \frac{\partial}{\partial a}\tilde{p}_i^e(t, a) + (\beta^e(a) + m^e(a))\tilde{p}_i^e(t, a) + \lambda\tilde{p}_i^e(t, a) = \phi_i(t)\beta^e(a), & a \in [0, L^e], \\ -\partial_t\tilde{p}_i^l(t, a) - \partial_a\tilde{p}_i^l(t, a) + (\beta^l(a) + m^l(a))\tilde{p}_i^l(t, a) + \lambda\tilde{p}_i^l(t, a) = \beta^l(a)\tilde{p}_i^p(t, 0), & a \in [0, L^l], \\ -\partial_t\tilde{p}_i^p - \partial_a\tilde{p}_i^p + m^p(a)\tilde{p}_i^p(t, a) + \lambda\tilde{p}_i^p(t, a) = \beta^p(a)\tilde{p}_i^e(t, 0), & a \in [0, L^p], \\ \tilde{p}_i^e(T, a) = 2[u^e(T, a) - \psi^e(a)]e^{-\lambda t}, & a \in [0, L^e], \\ \tilde{p}_i^l(T, a) = 2[u^l(T, a) - \psi^l(a)]e^{-\lambda t}, & a \in [0, L^l], \\ \tilde{p}_i^p(T, a) = 2[u^p(T, a) - \psi^p(a)]e^{-\lambda t}, & a \in [0, L^p], \\ \tilde{p}_i^e(t, L) = \tilde{p}_i^l(t, L) = \tilde{p}_i^p(t, L) = 0. \end{cases}$$

pour  $i$  égal à 1, 2 et  $t$  strictement positif. On pose

$$\phi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) \quad \text{et} \quad \tilde{p}^k(t, a) = \tilde{p}_1^k(t, a) - \tilde{p}_2^k(t, a), \quad k = e, l, p.$$

Ces fonctions vérifient alors le système suivant

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t}\tilde{p}^e(t, a) - \frac{\partial}{\partial a}\tilde{p}^e(t, a) + (\beta^e(a) + m^e(a))\tilde{p}^e(t, a) + \lambda\tilde{p}^e(t, a) = \phi(t)\beta^e(a), & a \in [0, L^e], \\ -\partial_t\tilde{p}^l(t, a) - \partial_a\tilde{p}^l(t, a) + (\beta^l(a) + m^l(a))\tilde{p}^l(t, a) + \lambda\tilde{p}^l(t, a) = \beta^l(a)\tilde{p}^p(t, 0), & a \in [0, L^l], \\ -\partial_t\tilde{p}^p - \partial_a\tilde{p}^p + m^p(a)\tilde{p}^p(t, a) + \lambda\tilde{p}^p(t, a) = \beta^p(a)\tilde{p}^e(t, 0), & a \in [0, L^p], \\ \tilde{p}^e(T, a) = \tilde{p}^e(t, L^e) = 0, & a \in [0, L^e], \\ \tilde{p}^l(T, a) = \tilde{p}^l(t, L^l) = 0, & a \in [0, L^l], \\ \tilde{p}^p(T, a) = \tilde{p}^p(t, L^p) = 0, & a \in [0, L^p]. \end{cases}$$

La première équation de ce système est multipliée par  $\tilde{p}^e$  puis intégrée sur le domaine  $[0, L^e] \times [0, T]$ . De la même manière, la deuxième et la troisième équation sont respectivement multipliées par  $\tilde{p}^l$  et  $\tilde{p}^p$  puis intégrées sur les domaines  $[0, L^l] \times [0, T]$  et  $[0, L^p] \times [0, T]$ . On déduit alors après quelques simplifications le système suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{p}^e(t, 0))^2 dt + \lambda \int_0^T \int_0^{L^e} (\tilde{p}^e(t, a))^2 da dt \leq \int_0^T \int_0^{L^e} \phi(t, 0) \beta^e(a) \tilde{p}^e(t, a) da dt, \\ \frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{p}^l(t, 0))^2 dt + \lambda \int_0^T \int_0^{L^l} (\tilde{p}^l(t, a))^2 da dt \leq \int_0^T \int_0^{L^l} \beta^l(a) \tilde{p}^e(t, 0) \tilde{p}^l(t, a) da dt, \\ \frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{p}^p(t, 0))^2 dt + \lambda \int_0^T \int_0^{L^p} (\tilde{p}^p(t, a))^2 da dt \leq \int_0^T \int_0^{L^p} \beta^p(a) \tilde{p}^e(t, 0) \tilde{p}^p(t, a) da dt. \end{cases} \quad (9.22)$$

En appliquant l'inégalité de Young sur le terme à droite des inégalités on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^{L^e} \phi(t, 0) \beta^e(a) \tilde{p}^e(t, a) da dt &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \int_0^{L^e} (\beta^e(a))^2 da \int_0^{L^e} (\tilde{p}^e(t, a))^2 da dt + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^T \phi^2(t, 0) dt, \\ \int_0^T \int_0^{L^l} \beta^l(a) \tilde{p}^e(t, 0) \tilde{p}^l(t, a) da dt &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \int_0^{L^l} (\beta^e(a))^2 da \int_0^{L^e} (\tilde{p}^l(t, a))^2 da dt + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^T (\tilde{p}^p(t, 0))^2 dt, \\ \int_0^T \int_0^{L^p} \beta^p(a) \tilde{p}^e(t, 0) \tilde{p}^p(t, a) da dt &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \int_0^{L^p} (\beta^p(a))^2 da \int_0^{L^p} (\tilde{p}^p(t, a))^2 da dt + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^T (\tilde{p}^e(t, 0))^2 dt, \end{aligned}$$

où  $\epsilon$  est une constante positive. Pour  $\epsilon = \frac{\lambda}{2}$ , le système (9.22) devient

$$\begin{aligned} \int_0^T (\tilde{p}^e(t, 0))^2 dt &\leq 2 \frac{\|\beta^e\|_{L^2([0, L^e])}^2}{\lambda} \int_0^T \phi^2(t, 0) dt \\ \frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{p}^l(t, 0))^2 dt &\leq \frac{\|\beta^l\|_{L^2([0, L^l])}^2}{\lambda} \int_0^T (\tilde{p}^p(t, 0))^2 dt \\ \int_0^T (\tilde{p}^p(t, 0))^2 dt &\leq 2 \frac{\|\beta^p\|_{L^2([0, L^p])}^2}{\lambda} \int_0^T (\tilde{p}^e(t, 0))^2 dt \end{aligned}$$

L'intégrale dans le terme à droite de la deuxième inégalité a un majorant qui est donné par la dernière inégalité, on déduit alors

$$\begin{aligned} \int_0^T (\tilde{p}^e(t, 0))^2 dt &\leq 2 \frac{\|\beta^e\|_{L^2([0, L^e])}^2}{\lambda} \int_0^T \phi^2(t, 0) dt, \\ \frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{p}^l(t, 0))^2 dt &\leq 2 \frac{\|\beta^l\|_{L^2([0, L^l])}^2}{\lambda} \frac{\|\beta^p\|_{L^2([0, L^p])}^2}{\lambda} \int_0^T (\tilde{p}^e(t, 0))^2 dt. \end{aligned}$$

En utilisant la première inégalité pour majorer la deuxième inégalité, on obtient

$$\int_0^T (\tilde{p}^l(t, 0))^2 dt \leq K \int_0^T \phi^2(t, 0) dt,$$

où  $K = 8 \frac{\|\beta^e\|_{L^2([0, L^e])}^2 \|\beta^l\|_{L^2([0, L^l])}^2 \|\beta^p\|_{L^2([0, L^p])}^2}{\lambda^3}$ . En posant

$$\lambda > 2 \left( \|\beta^e\|_{L^2([0, L^e])}^2 \|\beta^l\|_{L^2([0, L^l])}^2 \|\beta^p\|_{L^2([0, L^p])}^2 \right)^{1/3}$$

on montre que l'application  $\Lambda$  est contractante. □

Pour que le calcul du gradient de la fonction Lagrangienne soit complet, on dérive  $\mathcal{L}$  par rapport aux variables  $m^k$  pour  $k$  égal à  $e, l, p$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(S)}{\partial m^e}, l^e \right\rangle_{L^2([0, T] \times [0, L^e])} &= \int_0^T \int_0^{L^e} m^e(a) p^e(t, a) l^e(a) da dt \\ \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(S)}{\partial m^l}, l^l \right\rangle_{L^2([0, T] \times [0, L^l])} &= \int_0^T \int_0^{L^l} m^l(a) p^l(t, a) l^l(a) da dt \\ \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(S)}{\partial m^p}, l^p \right\rangle_{L^2([0, T] \times [0, L^p])} &= \int_0^T \int_0^{L^p} m^p(a) p^p(t, a) l^p(a) da dt \end{aligned}$$

pour toutes fonctions  $l^k$  dans l'espace  $L^2([0, L^k])$  telles que  $l^k(L) = l^k(0) = 0$ , pour  $k$  égal à  $e, l, p$ .

Le vecteur  $S$  est un optimum du problème  $[P_4]$  si et seulement si  $\nabla \mathcal{L}(S) = 0$ , c'est à dire si les équations suivante sont satisfaites

$$\begin{cases} m^e(a) p^e(t, a) = 0, & a \in [0, L^e], \\ m^l(a) p^l(t, a) = 0, & a \in [0, L^l], \\ m^p(a) p^p(t, a) = 0, & a \in [0, L^p], \end{cases} \quad (9.23)$$

où  $t$  est strictement positif. Les fonctions  $p^e, p^l$  et  $p^p$  sont données par

$$\begin{cases} p^e(t, a) = \theta^e(a - t + T) e^{-\int_a^{a-t+T} (\beta^e + m^e)(s) ds} + \int_t^T \beta^e(a) p^l(s, 0) e^{-\int_t^s (\beta^e + m^e)(\tau) d\tau} ds, \\ p^l(t, a) = \theta^l(a - t + T) e^{-\int_a^{a-t+T} (\beta^l + m^l)(s) ds} + \int_t^T \beta^l(a) p^p(s, 0) e^{-\int_t^s (\beta^l + m^l)(\tau) d\tau} ds, \\ p^p(t, a) = \theta^p(a - t + T) e^{-\int_a^{a-t+T} m^p(s) ds} + \int_t^T \beta^p(a) p^e(s, 0) e^{-\int_t^s m^p(\tau) d\tau} ds, \end{cases}$$

pour  $a \leq t - T$  et  $t$  strictement positif où les fonctions  $\theta^k$  sont

$$\theta^k(a) = 2 \left[ u^k(T, a) - \psi^k(a) \right], \quad k = e, l, p.$$

Ces variables duales dépendent des taux de mortalités  $m^e, m^l$ , et  $m^p$ .

## 9.2 Résultats numériques.

On résout le problème  $[P_4]$  avec l'algorithme de descente de Quasi-Newton (QN) donné dans le chapitre 6. Cette méthode converge car la fonction Lagrangienne vérifie les conditions de compatibilité, à savoir que cette fonction est deux fois dérivable et les dérivées premières et secondes sont Lipschitziennes. De plus, les variables d'état  $u^k$ , pour  $k$  égal à  $e, l, p$ , et les variables duales  $p^k$ , pour  $k$  égal à  $e, l, p$  définies dans le paragraphe précédent sont des fonctions continues par rapport aux taux de mortalité.

Pour les calculs présentés dans ce paragraphe, les observations  $\psi^k$  pour chaque stade de développement  $k$  sont construites en résolvant le problème (9.1)-(9.2)-(9.3). Pour cela, on se donne le taux d'éclosion  $\beta^e$ , le taux d'émergence  $\beta^l$  et le taux de ponte  $\beta^e$  égal à

$$\beta^e(a) = \frac{0,5}{L^e - a}, a \in \left[\frac{L^e}{2}, L^e\right], \quad \beta^l(a) = \frac{0,5}{L^l - a}, a \in \left[\frac{L^l}{2}, L^l\right], \quad \beta^p(a) = 10e^{-\left(\frac{a-2}{0,25}\right)^2}, \quad a \in [0, L^p].$$

où l'âge maximal des stades oeuf et papillon est fixé à 5 et l'âge maximal des larves est fixé à 10. Ces valeurs ne sont pas représentatives de la réalité mais sont choisies ainsi pour diminuer le

temps et le nombre de calculs. Les taux d'éclosion et d'émergence modélisent un développement entre les stades oeuf et larve et entre les stades larve et papillon en fin de stade oeuf et larve avec un maximum à l'âge maximal de vie. La valeur choisie pour les fonctions de mortalité est

$$m_{ex}^e(a) = \frac{0,3}{L^e - a}, a \in [0, L^e], \quad m_{ex}^l(a) = \frac{0,3}{L^l - a}, a \in [0, L^l], \quad m_{ex}^f(a) = \frac{0,3}{L^p - a}, a \in [0, L^p].$$

La donnée initiale des densités  $u^k$  pour  $k$  égal à  $e, l, p$  est

$$u_0^e(a) = e^{-\left(\frac{a-1}{0,25}\right)^2}, \quad a \in [0, L^e], \quad u_0^l(a) = u_0^p(a) = 0, \quad a \in [0, L^k], k = l, p.$$

Les distributions en âge des populations oeuf  $\psi^e$ , larve  $\psi^l$  et papillon  $\psi^p$  sont réalisées à l'instant  $T = 20$ , c'est à dire 20 jours après la naissance des oeufs de la première génération. En utilisant l'algorithme de QN, on résout le problème  $[P_4]$  pour ces observations.

### Estimation des taux de mortalité oeuf, larve et papillon.

On représente sur la figure 9.1 les fonctions de mortalité correspondant aux valeurs exactes  $m_{ex}^k$  (courbe noire) pour  $k$  égal à  $e, l, p$  et les fonctions de mortalité estimées  $m_{app}^k$  (courbe bleue) pour  $k$  égal à  $e, l, p$ . La distribution des populations oeuf, larve et papillon à l'instant  $T$  est donnée en fonction de la valeur des 3 taux de mortalité sur la figure 9.2.

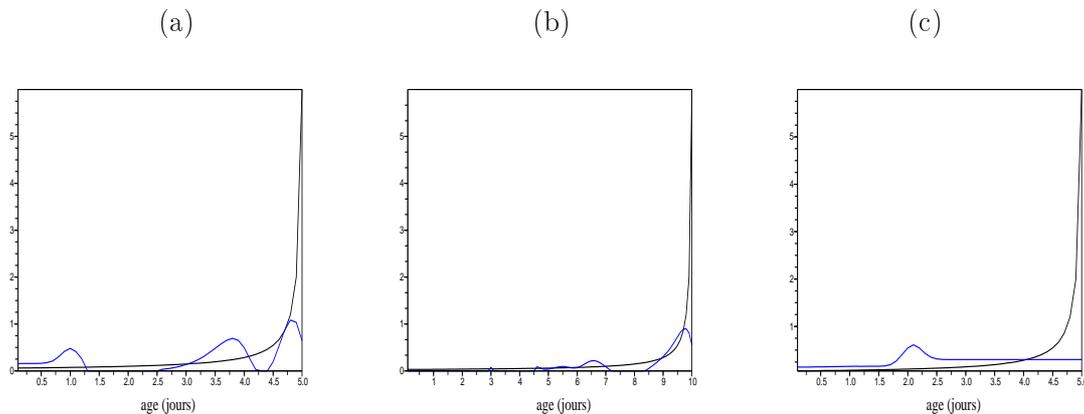


FIG. 9.1: Taux de mortalité des stades oeuf (a), larve (b) et papillon (c) en fonction de l'âge. La courbe noire est la valeur exacte de la fonction. La courbe bleue est la solution du  $[P_4]$  obtenue par la méthode QN.

Les courbes de la figure 9.1 ne se superposent pas, le problème  $[P_4]$  n'admet donc pas une unique solution. La donnée sur la répartition de la population en fonction de l'âge à un instant précis ne suffit pas à identifier les taux de mortalité oeuf, larve et papillon du problème (9.1)-(9.2)-(9.3).

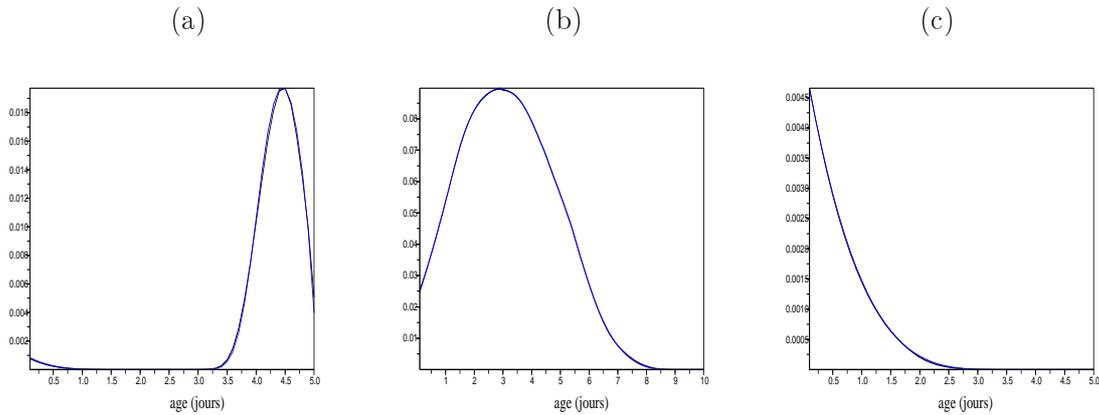


FIG. 9.2: Distribution des populations oeuf (a), larve (b) et papillon (c) en fonction de l'âge à l'instant  $T$ . La courbe noire est l'observation construite avec la valeur exacte des taux de mortalité. La courbe bleue est l'observation construite avec la solution de  $[P_4]$  obtenue par la méthode QN.

### Estimation du taux de mortalité oeuf.

En se donnant les fonctions de mortalité larve et papillon, on résout le problème  $[P_4]$  pour estimer le taux de mortalité oeuf. La solution du graphe (a) de la figure 9.3 est obtenue sans régularisation sur le taux de mortalité alors que la solution du graphe (b) est obtenue en régularisant la fonction de mortalité avec sa norme minimale et sa norme minimale de sa dérivée première. Les densités oeufs, larves et papillons associées à ce calcul à l'instant  $T$  sont dessinées sur la figure 9.2.

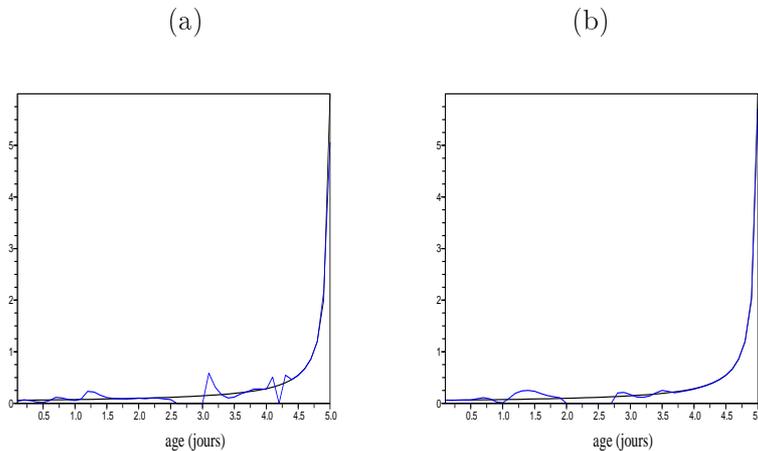


FIG. 9.3: Taux de mortalité du stade oeuf en fonction de l'âge. La courbe noire est la valeur exacte de la fonction. La courbe bleue est la solution de  $[P_4]$  obtenue par la méthode QN. (a) : sans régularisation de la solution, (b) : avec régularisation de la solution.

Les irrégularités sont atténuées en pénalisant la fonction coût avec la norme minimale du taux de mortalité oeuf et la norme minimale de sa dérivée première comme on peut le voir sur la figure 9.3-(b). Le problème d'identification  $[P_4]$  discret admet un unique taux de mortalité oeuf à condition que les taux de mortalité des populations larvaire et papillon sont connus.

## Troisième partie

# Etude biologique avec le modèle *Lobesia botrana*.



## Chapitre 10

# Effet thermique sur le développement larvaire et modélisation.

Dans ce chapitre, on cherche à caractériser la vitesse de croissance de l'Eudémis pendant les stades larvaires en fonction de la température. Les mesures faites sur la durée de développement de l'insecte sont obtenues à température constante sur des cohortes d'oeufs (Götz, 1941) et des cohortes de chenilles (Brière, 1998). Sur Eudémis, seul Auroy (2006) a réalisé des expériences sur des cohortes d'oeufs à température fluctuante. Cette étude a permis de montrer que des régimes thermiques variables induisaient des vitesses de croissance de l'oeuf différentes de celles obtenues à température constante. Le temps de développement des oeufs et la dynamique d'éclosion ne variaient pas en fonction de la somme thermique mais par rapport à l'amplitude thermique journalière. Les travaux de Matteson et al. (1965) ou encore de Behrens et al. (1983) montrent aussi que la variation de la température affecte la croissance de certains insectes comme la pyrale du maïs *Ostrinia nubilalis* ou le criquet *Gryllus bimaculatus*. On propose de mesurer le développement d'une cohorte de chenilles en fonction d'une température fluctuante. Les résultats sont comparés aux mesures faites à température constante.

A partir de ces informations, on modélise le développement de l'Eudémis en fonction de la température. Les simulations du modèle sont comparées aux données expérimentales dont nous disposons.

### 10.1 Durées de développement à température constante.

La durée de développement permet de déterminer l'âge de l'insecte. Elle est exprimée soit en âge chronologique, soit en âge physiologique. L'âge chronologique est référé à l'unité temporelle (heure, jour, semaine...) alors que l'âge physiologique est caractérisé par des variables morphologiques (taille, poids) qui peuvent être assimilées à un nombre de degrés jours. La plupart des mesures faites sur Eudémis sont données en âge chronologique mais des travaux plus anciens, comme ceux de Touzeau (1979), les donnaient en nombre de degrés jours.

Le tableau 10.1 regroupe les mesures de Brière (1998) sur le temps de développement des 5 stades larvaires ( de L1 à L5 ) et du stade chrysalide sous des conditions thermiques constantes. Les durées de développement sont obtenues pour 14 températures qui s'échelonnent de 8°C à 34°C. Des enceintes climatiques sont utilisées pour réguler des conditions thermiques et hygrométriques de 65%r.h. constantes. L'unité de mesure est le jour. Le protocole expérimental adopté par Brière est précisé dans sa thèse (Brière, 1998).

T	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
L1	0	25,9	23,4	15,1	13,2	11,7	5,9	4,2	3,9	3,7	3,6	3,3	4,5	6,7
L2	0	23,2	16,1	10,6	8,9	7,1	4,8	3,8	3,1	3	2,9	2,9	3,4	6,4
L3	0	0	12,7	9,8	8,3	5,6	4,7	4	3,8	3,2	3	2,9	3,4	0
L4	0	0	15,7	10,6	10	7	5,1	4,9	3,7	3,6	3,6	2,9	3,9	0
L5	0	0	25,5	17,9	13,5	13,3	7,6	7,1	6,5	6,2	6	5,8	6,9	0
chrysalide	0	0	0	48	35,5	23,2	15,1	12,9	10,2	8,6	7,9	7,8	7,7	0

TAB. 10.1: Durées de développement des 5 stades larvaires et du stade chrysalide de cohortes de chenilles d'*Eudémis* en fonction de la température constante et d'une photopériode de L16 : D8 (données de Brière, 1998).

Le développement le plus court est mesuré pour tous les stades de développement pour une température journalière moyenne de 30°C. Au delà et en dessous de cette température la croissance est plus longue. Les stades L1, L5 et chrysalide sont généralement plus longs que les autres stades larvaires. Les températures pour lesquelles aucun développement n'est observé varient en fonction du stade physiologique. Pour une température constante de 12°C, 10°C et 8°C Brière n'observe aucun développement pour respectivement le stade chrysalide, les stades L5, L4, L3 et les stades L2, L1. Pour la température la plus chaude 34°C, la durée de développement n'est pas déterminée à partir du stade L3.

#### Vitesse de développement à température constante.

Elle est égale à l'inverse de la durée de développement, c'est donc une constante positive plus petite que un. La vitesse de développement est parfois exprimée en pourcentage et s'appelle dans ce cas le taux de croissance. La forme générale de la vitesse de développement en fonction de la température est celle de la figure 10.1.

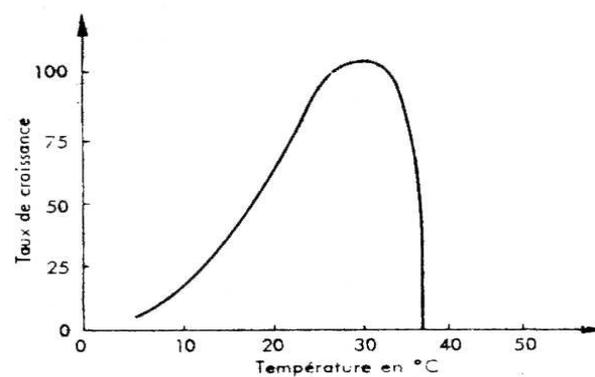


FIG. 10.1: Forme de la vitesse de développement ou du taux de croissance en fonction de la température pour une population *Eudémis*.

De nombreux chercheurs tentent de décrire mathématiquement cette courbe en fonction de la température. Certains adoptent une approche biophysique c'est à dire qu'ils modélisent la croissance de l'insecte comme une réaction enzymatique complexe. Ces modèles sont dûs, pour les plus récents et les plus élaborés, à Sharpe et Demichelle (1977) ou à Schoolfield et al. (1981). D'autres chercheurs préfèrent une approche empirique. Par exemple, Brière (1998) compare les

modèles empiriques sur son jeu de données expérimentales (tableau 10.1). Pour lui, ces modèles sont les plus performants car ils sont exprimés en fonction de paramètres biologiques comme les modèles biophysiques. L'avantage est que ces paramètres sont moins nombreux et plus faciles à identifier par une méthode d'estimation des paramètres. Les arguments de Brière sont aussi ceux partagés par Logan (1988) qui est l'auteur de plusieurs fonctions de développement. En général, ces paramètres biologiques correspondent aux températures seuil de développement zéro, optimale et létale.

Les deux équations qui s'adaptent le mieux aux jeux de données de Brière (tableau 10.1) sont l'équation de Logan et al.(1976)

$$v(T) = \psi \left[ e^{\rho T} - e^{\rho T_l - \frac{T_l - T}{\Delta T}} \right], \quad \Delta T = T_l - T_{opt},$$

et l'équation de Brière (1998)

$$v(T) = bT(T - T_0)\sqrt{(T_l - T)},$$

où  $v(T)$  est la valeur de la vitesse de développement à la température  $T$ . Les constantes  $T_l$ ,  $T_{opt}$  et  $T_0$  sont respectivement la température létale, la température optimale de développement et la température seuil de développement zéro. Les autres paramètres de ces deux équations sont des constantes empiriques. L'équation de Brière permet d'estimer les constantes  $T_l$  et  $T_0$  mais aussi la température  $T_{opt}$  à partir de la dérivée première de la fonction. L'équation de Logan permet aussi le calcul de ces paramètres biologiques sauf celui de la température seuil de développement zéro  $T_0$  car l'axe des abscisses est asymptote à la courbe.

Quelque soit l'expression mathématique utilisée, cette fonction décrit la vitesse de développement de l'insecte pour des conditions de température constante. Chez Eudémis, aucune expérience n'a été conduite pour mesurer ce taux pour des situations thermiques fluctuantes. On ne peut donc dire si des changements quotidiens de la température produisent des changements dans la croissance de l'insecte. On propose alors dans le paragraphe suivant de mesurer la durée de développement de l'insecte sous des conditions de température non constantes.

## 10.2 Effet thermique sur le développement larvaire.

L'objectif de cette expérience que nous avons réalisé est de mesurer la dynamique d'émergence d'une cohorte de larves sous des conditions thermiques fluctuantes et donc de mesurer la vitesse de développement.

### 10.2.1 Matériels et méthodes.

Les cycles de température sont choisis tels que la somme quotidienne en degrés jours est identique et tels qu'ils soient représentatifs de conditions thermiques estivales. La somme de degrés jours correspond à la quantité de chaleur accumulée toutes les heures sur une journée. On prend une photopériode de 16h de jour et 8h de nuit. La lumière est réglée à 50 Lumines pour les phases de jour. La température du jour est plus chaude que la température de la nuit sauf sur l'expérience témoin qui est conduite à 18,4°C constant. La somme thermique quotidienne est fixée à 441,6°C (18,4°C×24h). On réalise 3 expériences avec les cycles de température précisés dans le tableau 10.2.

	régime 1	régime 2	régime 3
Jour(16h)	18,4°C	23,1°C	20,6°C
nuit (8h)	18,4°C	9°C	14°C

TAB. 10.2: Régimes thermiques quotidiens utilisés pour mesurer le développement larvaire. La somme thermique par jour est de 441,6°C sur les 3 modalités.

Les chenilles sont fournies par l'élevage de l'UMR Santé Végétale de l'INRA basé à Villenave d'Ornon. On utilise 500 individus par expérience tous âgés du même jour du début du stade L1. Les chenilles sont déposées séparément dans un godet sur du milieu semi-artificiel. Les conditions d'élevage des insectes et la méthode de préparation du milieu sont précisées dans le rapport de stage d'Auroy (2006). La date d'émergence et le sexe de l'individu sont notés sur l'ensemble de la population. On obtient finalement une dynamique d'émergence en fonction des femelles et des mâles sous 3 régimes thermiques mais aussi le temps de développement moyen d'une chenille pour se transformer en papillon.

### 10.2.2 Résultats et conclusions.

Dans la première expérience, à régime constant, 379 papillons (75,8%) ont émergé. Ils sont 430 papillons (86%) sur l'expérience avec le régime thermique 2 et 495 papillons (99%) sur la dernière expérience où la température est réglée selon le régime 3. Le sex ratio est respectivement de 54% de femelles et 46% de mâles, de 50/50, et de 44% de femelles et 56% de mâles. Sur les 3 échantillons, les proportions de mâles et de femelles sont proches.

Le développement moyen de ces populations est donné dans le tableau 10.3. A régime constant la durée de développement de la population est de 46,5 jours. Elle est 5 jours plus longue que la durée de développement d'une population soumise à un régime thermique 2 (41,6 jours). Le développement est aussi plus rapide lorsque la population est soumise à un régime thermique 3, il est 2 jours et demi plus court (43,9 jours). La durée de développement des femelles est environ 4 jours plus longue que celle des mâles sur les 3 expériences.

	totale	femelle	mâle
Régime 1	46,5	48,56	44,19
Régime 2	41,6	43,43	39,87
Régime 3	43,9	46,11	42,32

TAB. 10.3: Durées de développement de la population totale et en fonction du sexe mesurées pour les 3 régimes thermiques du tableau (10.2). La somme thermique par jour est de 441,6°C sur les 3 modalités.

La dynamique d'émergence des populations échantillonnées, en nombre d'individus est reproduite sur la figure 10.2. La courbe rose représente la dynamique des femelles et celle en bleu est associée à la dynamique des mâles. La courbe noire est la somme de ces deux dynamiques. Le premier mâle apparaît le 38ème jour sur l'expérience "régime 2", le 39ème jour sur l'expérience "régime 3" et le 41ème jour sur l'expérience témoin. La dynamique d'émergence est donc avancée de 3 jours lorsque l'amplitude thermique de la journée est de 14°C et de 2 jours lorsque l'écart thermique quotidien est de presque 7°C. Sur les 3 expériences, les mâles émergent 3 jours plus

tôt que les femelles. La dynamique d'émergence dure approximativement 18 jours (19 jours sur l'expérience "régime 3") quelque soit le régime thermique testé. Elle dure moins longtemps pour les mâles, 11 jours (15 jours sur l'expérience "régime 3"), que pour les femelles, 15 jours (16 jours sur l'expérience "régime 3").

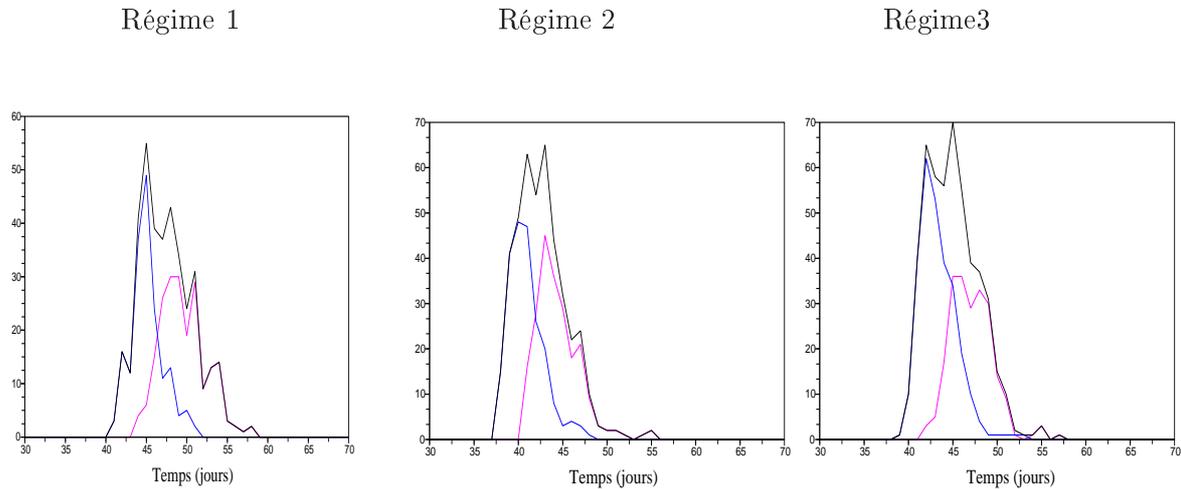


FIG. 10.2: Dynamiques d'émergence, en nombre d'individus, mesurées sur 3 régimes thermiques différents (tableau 10.2) mais de somme thermique identique ( $441,6^{\circ}\text{C}$ ). La courbe rose est la dynamique des femelles, celle en bleu des mâles. La courbe noire est la somme de ces courbes.

### Conclusion.

La durée de développement des chenilles ne varie pas en fonction de la somme thermique journalière mais par rapport à la variation de la température dans la journée. D'après les durées de développement à température constante données dans le tableau 10.1, la chrysalide ne se développe pas pour une température constante de  $12^{\circ}\text{C}$ . Par conséquent, seule la température chaude de  $23,1^{\circ}\text{C}$  du régime thermique 2 a affecté le développement de la chenille. La durée de développement d'une chenille soumise à une température constante de  $20,6^{\circ}\text{C}$  est plus courte que celle mesurée sous un régime thermique 3 (tableau 10.1). La température froide de  $14^{\circ}\text{C}$  pendant la nuit du régime 3 a ralenti de quelques jours la croissance de la chenille.

Les fluctuations thermiques quotidiennes affectent la date d'émergence du premier papillon mais n'ont pas d'effets sur la protandrie et la durée de la dynamique en temps du vol des adultes. Par conséquent, les différences de croissance entre chenilles sont constantes par rapport aux fluctuations thermiques journalières mais le positionnement dans le temps de la dynamique d'émergence dépend de ces variations.

## 10.3 Modélisation du développement larvaire en fonction de la température et simulations.

A partir des mesures sur la durée de développement à température constante, on modélise la croissance larvaire de l'Eudémis en fonction de la température. Les simulations du modèle *Lobesia botrana* sont comparées aux dynamiques d'émergence mesurées à différents régimes thermiques fluctuants représentées sur la figure (10.2).

### 10.3.1 Modélisation du développement larvaire en fonction de la température.

Le modèle est construit à partir des hypothèses biologiques suivantes : les différences de croissance d'une cohorte de chenilles sont constantes avec les fluctuations thermiques et la date d'émergence du premier papillon varie en fonction de la température. Ces hypothèses sont cohérentes avec les résultats obtenus précédemment sur les mesures de la durée du développement larvaire à température fluctuante. Le modèle mathématique s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u^l(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} u^l(t, a) = -\beta^l(T(t), a) u^l(t, a), & a \in [0, L] \\ u^l(t, 0) = 0, & t > 0 \\ u^l(0, a) = \phi(a), & a \in [0, L] \end{cases}$$

où  $u^l$  est la densité de chenilles à l'instant  $t$  et d'âge  $a$ ,  $\beta^l$  est le taux d'émergence à la température  $T$  du moment et d'âge  $a$  et  $L$  est l'âge maximal de vie. Les différences de croissance sont modélisées par le taux d'émergence. Ce dernier peut être estimé à partir de données expérimentales mesurant la dynamique d'émergence à une température donnée  $T_d$  (voir la troisième partie de la thèse). A partir de là, on définit le taux d'émergence suivant, pour décrire le développement larvaire sur l'ensemble des températures

$$\beta^l(T(t), a) = \beta_{est}^l(a - k(T(t))), \quad (10.1)$$

où  $\beta_{est}^l$  est le taux d'émergence estimé pour une température donnée  $T_d$  et  $k(T(t))$  est une fonction permettant de calculer la date d'émergence à la température  $T$ . La fonction  $k(T)$  est définie dans l'espace des fonctions réelles. Pour une valeur nulle de  $k(T(t))$ , la dynamique d'émergence prédite par le modèle est la dynamique expérimentale utilisée pour estimer la fonction  $\beta_{est}^l$ . Pour une valeur positive de  $k(T(t))$ , la dynamique d'émergence est prédite avant la dynamique expérimentale alors que pour une valeur négative de  $k(T(t))$ , la dynamique d'émergence est prédite après la dynamique expérimentale. La fonction  $k(T)$  est calculée par

$$k(T(t)) = R - D(T(t))$$

où  $R$  est la durée de développement moyenne à la température de référence  $T_d$  et  $D(T)$  est la durée de développement moyenne des chenilles à la température  $T$ . La fonction  $D(T)$ , et par conséquent  $k(T)$ , est une fonction discrète prenant les valeurs du tableau 10.4. Ces valeurs correspondent à la somme des durées de développement des stades larvaire et chrysalide mesurées par Brière (1998) à température constante. La fonction  $D(T)$  peut être décrite de manière continue en prenant l'inverse des équations mathématiques de Brière (1998) ou de Logan (1976) données au paragraphe 10.1. Quelque soit la forme de  $D(T)$ , l'équation (10.1) calcule la proportion de papillons émergents en fonction de la température  $T$  relevée à l'instant  $t$  et de l'âge  $a$  des chenilles.

T	<14	[14 ;16[	[16 ;18[	[18 ;20[	[20 ;22[	[22 ;24[	[24 ;26[	[26 ;28[	[28 ;30[	≤30
D	112	89,4	67,9	43,2	36,9	31,2	28,3	27	25,6	29,8

TAB. 10.4: Durées de développement ( $D$ ) d'une cohorte de chenilles jusqu'à l'émergence du papillon en fonction de la température constante  $T$ . Mesures obtenues par Brière (1998) et modélisées dans le modèle mathématique.

L'avantage de cette modélisation est qu'il n'est pas nécessaire d'estimer le taux d'émergence pour toutes les températures. La donnée d'une dynamique d'émergence pour des conditions thermiques constantes suffit pour décrire le développement larvaire en fonction de la température.

### 10.3.2 Application à des données expérimentales.

On considère les mesures faites, dans le paragraphe précédent, sur le développement larvaire en fonction de régimes thermiques fluctuants. La dynamique d'émergence de la population totale mesurée à une température de  $18,4^{\circ}\text{C}$  sert à estimer le taux d'émergence  $\beta_{est}^l$  (courbe bleue de la figure 10.3). La méthode d'estimation du taux d'émergence est développée dans la troisième partie de cette thèse. La représentation graphique du taux d'émergence estimé correspond à la figure 10.3 (b). Le modèle prédit sous des conditions thermiques constantes de  $18,4^{\circ}\text{C}$ , la dynamique d'émergence tracée en noir sur la figure 10.3 (a). Le nombre de papillons qui émergent est 3% de moins, soit 15 individus, que celui mesuré expérimentalement. La durée de développement de cette population est de 49 jours, soit 2,5 jours de plus (5% d'erreur) que la durée mesurée en laboratoire. Le modèle date la première apparition d'un adulte au jour 42 et prévoit une dynamique de vol sur 22 jours. Les prédictions sont erronées de 18% c'est à dire que le modèle prévoit l'émergence du premier papillon 1 jour trop tard et une dynamique de vol qui dure 4 jours plus long. Les erreurs d'estimation sont des erreurs numériques venant de la résolution du problème d'identification du taux d'émergence et de la résolution du modèle mathématique. En acceptant ces erreurs d'estimation, on utilise le taux d'émergence estimé dans l'équation (10.1) pour prédire les dynamiques d'émergence mesurées dans des conditions thermiques du régime 2 et 3. La population initiale est de 500 chenilles du stade L1 âgées le même jour et la température est relevée toutes les heures.

Le tableau 10.5 donne les valeurs expérimentales et simulées de la durée de développement moyenne, de la date de première émergence et de la durée de la dynamique de vol. Elles sont relatives à une cohorte larvaire soumise à des conditions thermiques constantes de  $18,4^{\circ}\text{C}$  (Régime 1), de 16h à  $23,1^{\circ}\text{C}$  et 8h à  $9^{\circ}\text{C}$  (Régime 2), et de 6h à  $20,6^{\circ}\text{C}$  et 8h à  $14^{\circ}\text{C}$  (Régime 3).

Sous un régime thermique de  $23,1^{\circ}\text{C}$  pendant 16h et  $9^{\circ}\text{C}$  pendant 8h, le modèle prédit, en intégrant une faible mortalité (38 papillons), l'émergence de 426 papillons (1% de moins par rapport aux données expérimentales) entre le 26ème et avant le 50ème jour. La durée de développement de cette population est de 33,8 jours, soit presque 8 jours de moins (18,75% d'erreur) que la durée obtenue expérimentalement pour ces conditions. La dynamique d'émergence est tracée sur la figure 10.4 (a) en noir. A partir du jour 26, la dynamique dure 22 jours. L'erreur d'estimation sur la date de début du vol est de 31% et celle sur la durée de ce vol de 18%.

Sous un régime thermique de  $20,6^{\circ}\text{C}$  pendant 16h et  $14^{\circ}\text{C}$  pendant 8h, le modèle prédit, sans mortalité, l'émergence de 486 papillons (2% de moins par rapport aux données expérimentales) entre le 32ème et avant le 50ème jour. Les erreurs d'estimation sur la date de début du vol et sur la durée de la dynamique sont de 18%. La durée de développement de cette population est de 39 jours, soit presque 5 jours de moins que la mesure obtenue sous ce régime thermique (11% d'erreur).

	Régime 1		Régime 2		Régime 3	
	modèle	données	modèle	données	modèle	données
D(j)	48,3	46,5	33,8	41,6	39	43,9
1er émergence (j)	42	41	26	38	32	39
Durée du vol (j)	22	18	22	18	22	19

TAB. 10.5: Durée de développement ( $D$ ), date de première émergence et durée du vol de la population totale, en jour, estimées par le modèle *Lobesia botrana* et mesurées expérimentalement pour 3 régimes thermiques. Régime 1 : 18,4°C constant; Régime 2 : 16h à 23,1°C et 8h à 9°C; Régime 3 : 16h à 20,6°C et 8h à 14°C. La somme thermique par jour est de 441,6°C sur les 3 modalités.

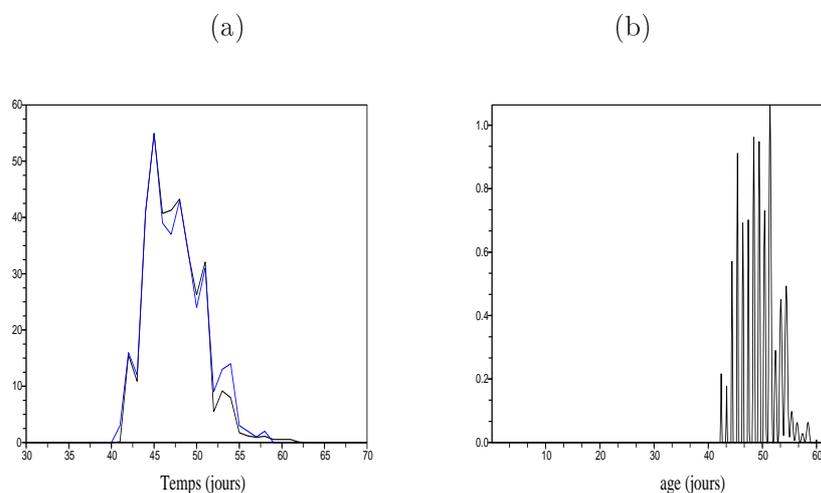


FIG. 10.3: (a) : Dynamiques temporelles d'émergence d'une cohorte de chenilles soumises à une température de 18,4°C constante. La courbe noire est la dynamique simulée par le modèle *Lobesia botrana* et la courbe bleue est la donnée expérimentale. (b) : Taux d'émergence estimé  $\beta_{est}^l$  en fonction de l'âge pour une température constante de 18,4°C.

### 10.3.3 Résultats et conclusions.

#### Résultats.

Le modèle prédit un développement en fonction de la température qui est celui observé. A une somme de degrés jours donnée quotidienne, la durée de développement diminue et la dynamique d'émergence est avancée lorsque les variations thermiques de la journée augmentent. La distribution dans le temps des papillons est identique sur les 3 régimes thermiques. La prédiction du modèle sur la taille de la population est correcte car l'erreur est inférieure à 2%. Cependant, les erreurs d'estimation sur la date de première émergence et la durée de développement sont importantes, jusqu'à 31% pour un écart thermique de 14°C et 18,75% pour un écart thermique de 7°C.

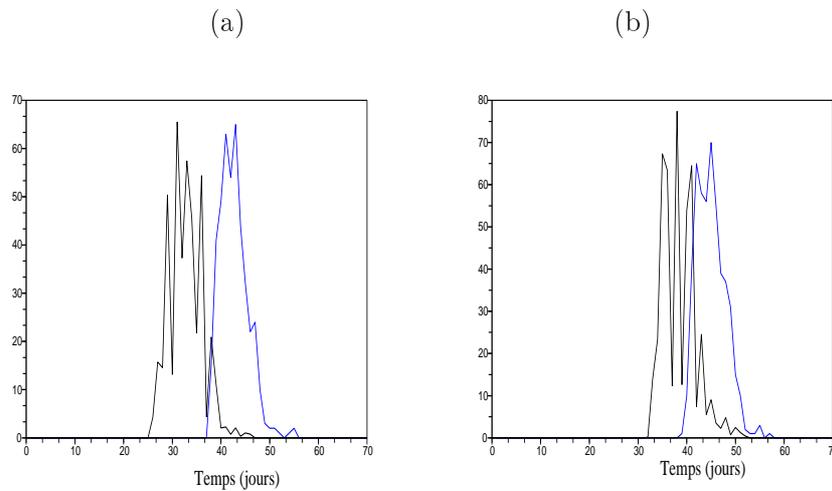


FIG. 10.4: *Dynamiques d'émergence d'une cohorte de chenilles soumises à un régime thermique fluctuant. La courbe noire est la dynamique simulée par le modèle Lobesia botrana et la courbe bleue est la donnée expérimentale. (a) : 16h à 23,1°C et 8h à 9°C. (b) : 16h à 20,6°C et 8h à 14°C.*

### Conclusions.

Le modèle *Lobesia botrana* prédit le développement larvaire en fonction de la température. Cependant, pour des régimes thermiques fluctuants, les erreurs d'estimation du modèle peuvent atteindre 30%. Ces erreurs viennent du taux d'émergence utilisé dans le modèle et du manque de mesures sur la durée de développement à température constante mais aussi à température fluctuante. Pour améliorer ces erreurs, il faudrait estimer le taux d'émergence pour toutes les températures c'est à dire il faudrait mesurer la dynamique d'émergence de cohortes de larves en fonction de la température.



## Chapitre 11

# Étude de la dynamique de ponte chez l'Eudémis de la vigne.

Dans ce chapitre, on tente de comprendre la dynamique temporelle de l'Eudémis de la vigne en se concentrant sur une période précise du cycle biologique : la ponte des oeufs. On cherche à caractériser le comportement de ponte en fonction de variables biologiques considérées dans cette thèse, à savoir les facteurs endogènes et la ressource alimentaire. Ces informations sont ensuite introduites dans le modèle *Lobesia botrana* pour simuler la dynamique temporelle de notre ravageur. En particulier, on étudie l'impact de scénarios climatiques sur la dynamique de ponte.

### 11.1 Caractérisation de la dynamique de ponte.

A partir de 3 échantillons de femelles, on caractérise statistiquement le comportement de ponte de celles-ci. Les femelles proviennent de milieux différents (terrain, élevage) et de chenille alimentées avec des nourritures différentes (semi-artificielle, poudre de raisin et raisin).

#### 11.1.1 Matériels et méthodes

##### Les données expérimentales.

On dispose de 3 jeux de données expérimentales dont les mesures ont été réalisées par Thiéry et Moreau. Le protocole de ces expériences est précisé dans les articles Thiéry et al. (2006) et Moreau et al. (2006).

Le premier échantillon comporte 164 femelles qui viennent de l'élevage d'Eudémis de l'INRA Villenave d'Ornon. Ces femelles sont accouplées avec des mâles venant aussi de l'élevage. Elles se sont développées avec une alimentation semi-synthétique dont la composition est détaillée dans l'article Thiéry et Moreau (2005).

Le deuxième échantillon comprend 283 femelles. Elles viennent aussi de l'élevage d'Eudémis de l'INRA et sont accouplées avec des mâles de cette même souche. Leur alimentation est fabriquée à partir de poudre de raisin, le détail est donné dans l'article Thiéry et al. (2006).

Le dernier échantillon est composé de 173 femelles sauvages dont la provenance est décrite dans l'article Moreau et al. (2006). Une partie d'entre elles (125 femelles) s'est accouplée avec des mâles venant d'une souche de laboratoire alors que la deuxième partie (48 femelles) s'est accouplée avec des mâles du terrain. Un Classement Hiérarchique Ascendant, dont la méthode est développée ci-dessous, a été appliqué sur chacun de ces groupes afin de caractériser des différences entre

eux. Ce test identifie les 5 mêmes comportements de ponte sur ces deux groupes de femelles avec une répartition des femelles sur ces classes de ponte très proches. Il n'y a alors pas d'effet du mâle, les deux groupes de femelles peuvent être réunis en un seul, permettant ainsi d'avoir un nombre total de femelles équivalent aux deux autres échantillons. Parmi les 173 femelles de cet échantillon, 18% ont mangé du gewürtztraminer, 7,5% du riesling, 10% du grenache, 44,5% du chasselas, 8,5% du gammay, et 11,5% du pinot noir. Plus d'un tiers de ces femelles a mangé du raisin chasselas. Pour ne pas influencer le résultat du test statistique, on supprime aléatoirement 42 femelles (54%) nourries au chasselas.

### Méthode et tests statistiques.

Avec la collaboration d'Anne Gégout Petit, on analyse statistiquement ces échantillons sous le logiciel R. Une analyse par Composantes Principales (ACP) est d'abord réalisée pour homogénéiser les 3 jeux de données. Le nombre de variables testées est de 8, 12 et 7 pour respectivement les échantillons 1, 2 et 3. Ces variables correspondent au nombre d'oeufs pondus par jour. L'ACP montre que, sous les 3 échantillons, les 4 premiers jours de ponte sont corrélés et qu'ils détiennent 96% de l'information (voir tableau en annexe). A partir de ce résultat, on détermine des groupes de femelles par rapport à la distribution dans le temps de leur oeufs en faisant un classement hiérarchique ascendant selon la méthode de Ward. Le résultat du test est un graphique qui est donné en annexe et qui s'apparente à un arbre. Pour mesurer les différences entre les groupes de femelles, une variable est calculée dont la méthode est donnée dans Lebart et al. (1997). On définit le nombre de classe de ponte par rapport à la valeur de cette variable. Plus elle est petite et plus les différences entre les groupes sont faibles. On calcule ensuite pour chaque classe de ponte identifiée des valeurs tests (voir tableau en annexe). Elles permettent de caractériser la classe de ponte en fonction de plusieurs variables. On choisit par exemple les jours de ponte, ou le nombre total d'oeufs pondus. Ces valeurs tests peuvent prendre des valeurs négatives ou positives. Les variables qui ont contribué à décrire une classe de ponte sont celles qui ont une valeur, en valeur absolue, strictement plus grande que 2. De cette analyse, on déduit aussi le nombre de femelles participant à chaque classe de ponte, ainsi que l'étalement de la dynamique de ponte et le taux de fécondité. Pour les deux échantillons de femelles alimentées sur de la poudre de raisin ou sur du raisin, les classes de ponte sont discutées en fonction du cépage sur lequel a grandi la chenille.

#### 11.1.2 Résultats et conclusions.

Sur les trois échantillons, le test statistique a déterminé 5 comportements de ponte. Les arbres correspondant sont donnés en annexe. Les différences entre chaque classe de ponte déterminée sont faibles, elles sont de l'ordre de 0.06 pour le premier et le dernier échantillon. La représentation graphique de ces dynamiques de ponte est reportée en pourcentage sur les figures (11.1). De haut en bas, les graphes correspondent aux dynamiques de ponte du premier échantillon, du deuxième échantillon et du troisième échantillon. Parmi toutes ces dynamiques de ponte identifiées, certaines se ressemblent sur un même échantillon, voir même sur l'ensemble des données testées.

Sur chaque échantillon, il existe des femelles qui pondent majoritairement le premier jour puis qui diminuent la quantité d'oeufs pondus par jour jusqu'au dernier jour de la ponte. Cette dynamique correspond à la courbe noire pour l'échantillon 1, et noire et bleue pour les échantillons 2 et 3. D'autres femelles préfèrent pondre le maximum de leurs oeufs le deuxième jour de la ponte. Cette dynamique est dessinée en bleu et noir pour le premier échantillon de femelles, puis en vert sur les deux autres échantillons. Un troisième comportement apparaît sur le premier échantillon et

le deuxième avec respectivement les courbes rose et rouge, et rose. Ces femelles répartissent leur ponte avec un maximum le troisième jour. Sur la figure (11.1), un dernier comportement de ponte se dessine qui est celui de pondre une grosse quantité d'oeufs le premier jour mais aussi un peu plus tard, comme le 3ème jour pour la courbe rouge du second échantillon et la courbe rose du dernier graphe, ou le 4ème jour comme la courbe rouge de l'échantillon 3.

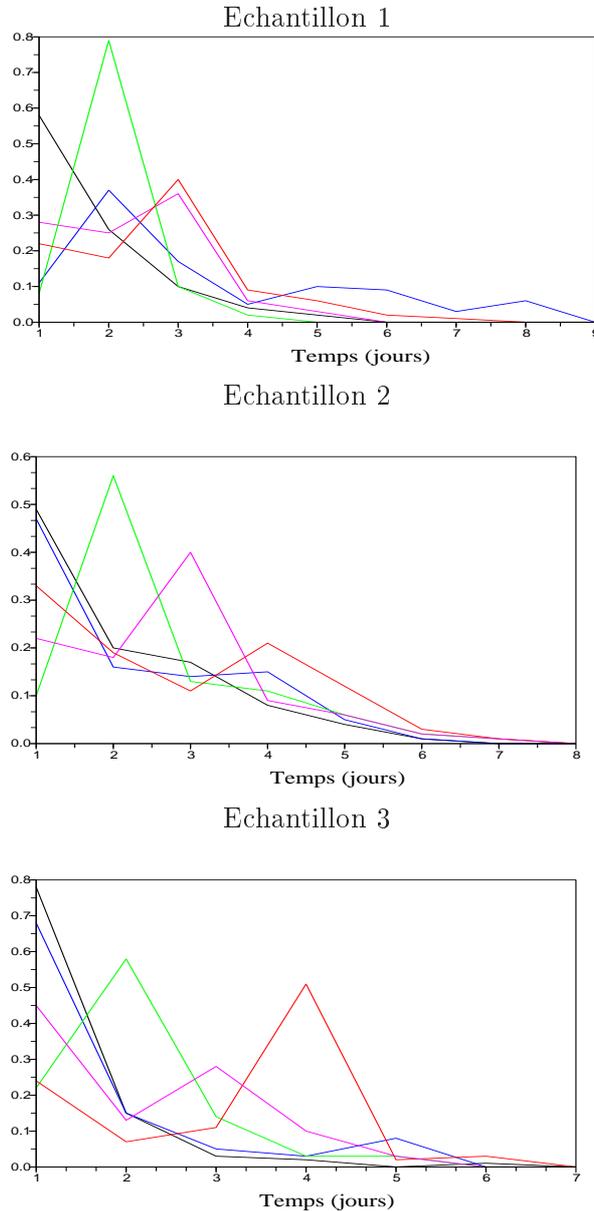


FIG. 11.1: Distributions temporelles des oeufs, en pourcentage, en fonction du comportement de ponte des femelles. Les classes de ponte sont déterminées par Classement Hiérarchique Ascendant (méthode de Ward).

### Effet cépage.

La proportion de femelles participant aux dynamiques de ponte identifiées par le test statistique est précisée en nombre d'individus et en pourcentage dans les tableaux 11.1. De haut en bas, les

tableaux correspondent aux dynamiques de ponte du premier échantillon, du deuxième échantillon et du troisième échantillon. On ajoute le taux de fécondité moyen (colonne total) et la durée moyenne de ponte (colonne durée) pour chacune des dynamiques de ponte.

Les femelles de l'échantillon 3 c'est à dire prélevées dans la vigne pondent moins que les autres femelles venant de l'élevage d'Eudémis. La durée moyenne de la dynamique de ponte de ces femelles est aussi plus courte que celle des femelles de laboratoire. Cependant, les proportions de femelles intervenant dans les classes de ponte communes aux échantillons 2 et 3, c'est à dire pour des femelles alimentées avec un cépage sont proches. Sur ces échantillons, on compte respectivement 64% et 61% des femelles qui pondent tout le premier jour puis un peu moins sur les jours suivants. Elles représentent plus de la moitié de la population totale alors qu'elles ne constituent que le tiers sur le premier échantillon. Les femelles alimentées à partir de raisin ont pour la plupart le même comportement de ponte qui est de distribuer les oeufs en majorité le premier jour. Une partie de ces femelles pond très peu (36% sur l'échantillon 2 et 40% sur l'échantillon 3) puisqu'elles apportent respectivement 3 fois et 4.5 fois moins d'oeufs que les autres femelles. Une classe de femelles de faibles pondeuses existe aussi sur le premier échantillon (2ème ligne du tableau du haut de la figure 11.1). Elles sont en quantité moins importante que sur les deux autres échantillons puisqu'elles représentent 9% de la population échantillonnée. Leur dynamique est aussi différente que celle des femelles des échantillons 2 et 3 car elles pondent avec un maximum le deuxième jour. La proportion de femelles adoptant une dynamique de ponte avec un maximum d'oeufs pondus le deuxième jour est proche pour les échantillons 2 et 3 (respectivement 15,5% et 12%). Le nombre de femelles avec ce comportement de ponte représentent sur l'échantillon 1 22% de la population. Le dernier tiers de cet échantillon de femelles, correspond à une population qui apporte le plus d'oeufs, 125 oeufs en moyenne. La dynamique de ponte de cette population est de distribuer ses oeufs sur plus de 4 jours avec un pic le troisième jour. Le pourcentage de femelles avec ce comportement représente sur l'échantillon 2 13% de la population et pondent en moyenne 182 oeufs. Le nombre de femelles qui n'ont pas la même dynamique de ponte entre les échantillons 2 et 3 représente 20% et 26% respectivement. Ce sont les femelles qui pondent en moyenne le plus d'oeufs et le plus longtemps.

Echantillon 1

courbe	Nb fem (%)	Nb oeuf/f	durée	oeuf/j/f
noire	117(41)	144	5.1	28,2
bleue	65 (23)	45.2	3.7	12,2
verte	44 (15,5)	135.7	5.5	24,6
rose	36(13)	182.7	6.4	28,5
rouge	21 (7,5)	144.9	5.9	24,5

Echantillon 2

courbe	Nb fem (%)	total	durée	oeuf/j/f
noire	61 (37,3)	117.27	3.78	31
bleue	15 (9)	55.8	4.13	13,5
verte	36 (22)	128.2	4.58	27,9
rose	14(8,5)	114.6	3.85	29,7
rouge	38 (23,2)	135.4	5.2	26

Echantillon 3

courbe	Nb fem (%)	Nb oeuf/f	durée	oeuf/j/f
noire	49 (37)	43	2.4	17,9
bleue	32 (24)	9.6	1.7	5,6
verte	16 (12)	46.8	3.5	13,3
rose	25 (19)	64.9	4.1	15,8
rouge	9 (7)	50.7	4.5	11,2

TAB. 11.1: Répartition des femelles sur les 5 classes de ponte identifiées par la méthode de Ward pour chaque échantillon. La colonne "total" est le taux de ponte moyen, celle "durée" est la durée moyenne de la ponte.

### Effet cépage comme qualité alimentaire sur les chenilles.

La répartition des femelles par cépage sur les 5 classes de ponte identifiées est donnée pour les échantillons 2 et 3 dans les tableaux de la figure 11.2. Ces résultats montrent que la qualité de la nourriture qu'a reçue la chenille fait varier le comportement de ponte des femelles. La dynamique temporelle de ponte caractérisée par un pic de ponte le deuxième jour existe chez des femelles dont la chenille s'est nourrie d'une poudre de raisin pinot noir (échantillon 2) alors que cette dynamique de ponte n'existe pas sur le troisième échantillon. De même, la dynamique temporelle de ponte définie avec deux pics, sur le premier et sur le troisième jour, est mesurée sur des femelles élevées sur Gewürtztraminer (échantillon 3) alors que ce comportement de ponte est absent de l'échantillon 2.

Echantillon 2

cépage	bleue	noire	verte	rose	rouge
chardonnay	26.19	45.24	9.52	7.14	11.9
chasselas	30.30	24.24	12.12	30.30	3.03
gewürtztraminer	17.86	35.71	21.43	25	0
grenache	23.08	42.31	11.54	11.54	11.54
lambrusque	14.29	57.14	14.29	8.57	5.71
merlot	23.81	35.71	14.29	21.43	4.76
pinot noir	23.26	34.88	27.91	2.33	11.63
riesling	23.53	55.88	11.76	0	8.82

Echantillon 3

cépage	noire	bleue	verte	rose	rouge
chasselas	31.43	31.43	8.57	5.71	22.86
gammay	46.67	6.67	6.67	6.67	33.33
gewürtztraminer	38.71	25.81	19.35	3.23	12.90
grenache	35.29	23.53	17.65	5.88	17.65
pinot noir	35.00	30.00	0	15.00	20
riesling	46.15	15.38	23.08	7.69	7.69

TAB. 11.2: Répartition des femelles en pourcentage pour tous les cépages testés en fonction des 5 classes de ponte. Pour un échantillon donné, les couleurs correspondent aux courbes de la figure 11.1.

### Conclusion.

Sur une population de femelles, 50% d'entre elles pondent leur oeufs pendant 3, 4 jours avec un maximum d'oeufs pondus soit sur le premier jour de ponte, soit sur le deuxième jour de ponte. La deuxième moitié des femelles adapte sa ponte en fonction de l'alimentation qu'a reçue la chenille et de son environnement. Ces femelles pondent en général sur 4, 5 jours avec des pics de ponte sur les derniers jours ou sur le premier et les derniers jours de la ponte.

## 11.1.3 Annexe

On présente dans ce paragraphe les résultats de l'ACP, et du classement hiérarchique ascendant en fonction de l'échantillon. Le calcul des valeurs test des classes de ponte déterminées par le classement hiérarchique ascendant est ajoutée. Pour les échantillons constitués de femelles dont la chenille s'est alimentée en raisin, on donne la répartition des femelles pour une classe de ponte en fonction du cépage.

## Echantillon 1.

variables	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8
J1	0.93	0.33	0.15	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
J2	-0.62	0.75	0.22	0.04	0.02	0.01	0.00	0.00
J3	-0.13	-0.42	0.87	-0.24	-0.02	0.01	0.00	0.00
J4	0.00	-0.29	0.38	0.86	-0.15	0.00	0.01	0.00
J5	0.03	-0.27	0.16	0.26	0.91	-0.05	-0.03	0.00
J6	-0.07	-0.26	-0.16	0.06	0.25	0.91	-0.05	-0.01
J7	-0.09	-0.21	-0.21	-0.01	0.14	0.15	0.27	0.89
J8	-0.08	-0.22	-0.12	-0.03	0.40	0.10	0.87	-0.07

TAB. 11.3: Corrélation des variables pour l'échantillon 2 obtenue par l'ACP. Les variables testées sont le nombre d'oeufs pondus par jour en fonction du jour de ponte.

composante principale	% variance	% cumulé
1	0.47	0.47
2	0.25	0.72
3	0.15	0.88
4	0.08	0.95
5	0.04	0.99
6	0.01	1.00
7	0.00	1.00
8	0.00	1.00

TAB. 11.4: Composantes principales calculées par l'ACP pour l'échantillon 1. Les 4 premières composantes représentent 95% de l'information (colonne % cumulé).

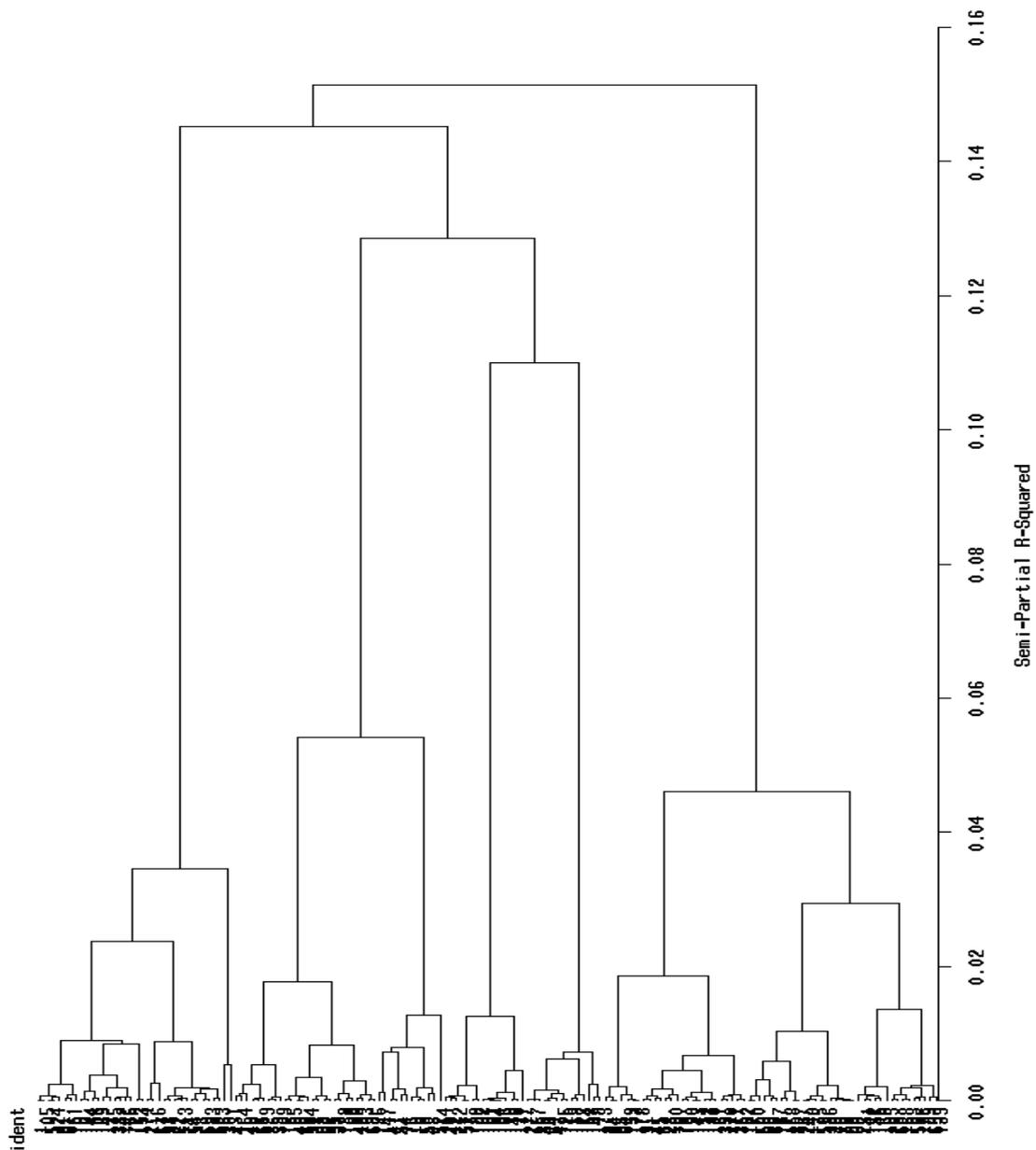


FIG. 11.2: Résultat du classement hiérarchique ascendant (méthode ward). L'axe des ordonnées représente les 164 femelles. On coupe l'arbre en 5 classes de ponte.

Courbe	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7
noire	8.23920	-2.02196	-5.73399	-4.13510	-2.29589	-1.76153	-1.32681
bleue	-5.08773	-2.90988	-3.04465	-2.44145	0.11608	3.61309	3.75092
verte	-1.37253	-1.01086	9.02392	-1.29155	-0.05357	-0.93501	-1.25056
rose	-4.34989	8.53907	-2.37759	-2.31653	-1.75946	-0.75431	0.12350
rouge	-1.73493	-0.35914	1.37055	9.20613	3.76849	0.96616	0.10224

Classe	J8	total
noire	-1.11014	-0.20662
bleue	4.14620	-6.88592
verte	-0.76503	1.88102
rose	-0.02770	-0.36277
rouge	-0.79221	3.33623

TAB. 11.5: Calcul des valeurs tests pour les 5 classes de ponte identifiées par le classement hiérarchique ascendant pour l'échantillon 1. Les variables J1 à J8 sont les jours de ponte et la variable "totale" est le nombre d'oeufs moyen pondus par femelle. Les couleurs correspondent aux courbes de la figure 11.1 de l'échantillon 1.

## Echantillon 2.

variables	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
J1	0.96	0.23	-0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
J2	-0.47	0.84	-0.27	-0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
J3	0.18	0.50	0.75	-0.40	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
J4	0.04	0.45	0.46	0.70	-0.31	0.00	0.00	0.00	0.00
J5	0.03	0.33	0.35	0.51	0.70	-0.07	0.02	0.00	0.00
J6	-0.02	0.30	0.26	0.26	0.38	0.72	-0.34	-0.01	0.00
J7	-0.06	0.09	0.11	0.11	0.13	0.70	0.68	-0.04	0.00
J8	-0.12	0.07	0.13	0.02	0.07	0.24	0.13	0.94	0.00
J9	0.03	0.04	0.03	0.00	-0.06	-0.02	0.00	0.14	0.99

TAB. 11.6: Corrélation des variables pour l'échantillon 2 obtenue par l'ACP. Les variables testées sont le nombre d'oeufs pondus par jour en fonction du jour de ponte.

composante principale	% variance	% cumulé
1	0.47	0.47
2	0.28	0.75
3	0.13	0.88
4	0.08	0.96
5	0.03	0.99
6	0.01	1.00
7	0.00	1.00
8	0.00	1.00
9	0.00	1.00

TAB. 11.7: Composantes principales calculées par l'ACP pour l'échantillon 2. Les 4 premières composantes représentent 96% de l'information (colonne % cumulé).

courbe	J1	J2	J3	J4	J5	J6
noire	-7.3089	-8.6609	-7.78889	-5.1788	-4.35604	-3.84220
bleue	10.9521	-1.9529	2.86272	-2.3775	-3.02299	-1.10411
verte	-7.3544	12.5880	-1.44313	0.1235	0.24861	0.96310
rose	2.7341	0.7568	-0.56934	10.3972	9.31201	4.70850
rouge	-2.1559	-0.7968	9.84008	-0.6104	0.48847	0.92315

courbe	J7	J8	J9	durée	total
noire	-0.84713	-1.23410	-0.54508	-7.43856	-12.8328
bleue	-1.65837	-1.51095	1.18903	0.67956	4.7201
verte	0.81782	2.27388	-0.42831	1.70376	1.3393
rose	1.67368	-0.49879	-0.38110	4.82404	6.4711
rouge	1.21694	2.30978	-0.28261	2.17260	1.6478

TAB. 11.8: Calcul des valeurs tests pour les 5 classes de ponte identifiées par le classement hiérarchique ascendant pour l'échantillon 2. Les variables J1 à J9 sont les jours de ponte, la variable "durée" est la durée moyenne en jours de ponte et la variable "totale" est le nombre d'oeufs moyen pondus par femelle. Les couleurs correspondent aux courbes de la figure 11.1 de l'échantillon 2.

courbe	chardonnay	chasselas	gewürtztraminer	grenache	lambrusque
noire	11(16.92)	10 (15.38)	5 (7.69)	6(9.23)	5 ( 7.69)
bleue	19 (16.24)	8 (6.84)	10 (8.55)	11 (9.40)	20( 17.09 )
verte	4 (9.09)	4 (9.09)	6 (13.64)	3 (6.82)	5 (11.36)
rose	3 (8.33)	10 (27.78)	7 (19.44)	3 (8.33)	3 (8.33)
rouge	5 (23.81)	1 (4.76)	0 (0)	3 (14.29)	2 (9.52)

courbe	merlot	pinot noir	riesling
noire	10(15.38)	10 (15.38)	8 (12.31)
bleue	15(12.82 )	15 (12.82 )	19 (16.24)
verte	6 (13.64)	12 (27.27)	4 (9.09)
rose	9 (25)	1 (2.78)	0 (0)
rouge	2 (9.52)	5 (23.81)	3 (14.29)

TAB. 11.9: Répartition des femelles en nombre d'individus (pourcentage) d'une classe de ponte en fonction de son alimentation. Les couleurs correspondent aux courbes de la figure 11.1 de l'échantillon 2.

### Echantillon 3.

variables	v1	v2	v3	v4	v5	v6
J1	0.99	-0.06	-0.10	0.02	0.00	0.00
J2	0.30	0.40	0.84	0.20	-0.04	0.00
J3	0.08	0.93	-0.19	-0.30	-0.04	0.01
J4	-0.14	0.47	-0.39	0.78	-0.02	-0.04
J5	0.05	0.34	0.11	-0.04	0.93	-0.10
J6	0.11	0.07	-0.10	0.50	0.34	0.78

TAB. 11.10: Corrélation des variables pour l'échantillon 23obtenue par l'ACP. Les variables testées sont le nombre d'oeufs pondus par jour en fonction du jour de ponte.

composante principale	% variance	% cumulé
1	0.48	0.48
2	0.23	0.71
3	0.15	0.86
4	0.10	0.96
5	0.03	0.99
6	0.01	1.00
7	0.00	1.00

TAB. 11.11: Composantes principales calculées par l'ACP pour l'échantillon 3. Les 4 premières composantes représentent 96% de l'information (colonne % cumulé).

classe	chasselas	gamay	gewürtztraminer	grenache	pinot noir	riesling
noire	11 (8.40)	7 (5.34)	12 (9.16)	6 (4.58)	7 (5.34)	6 (4.58)
bleue	11 (34.38)	1 (3.13)	8 (25.00)	4 (12.50)	6 (18.75)	2 (6.25)
verte	3 (2.29)	1 (0.76)	6 (4.58)	3 (2.29)	0	3 (2.29)
rose	2 (1.53)	1 (0.76)	1 (0.76)	1 (0.76)	3 (2.29)	1 (0.76)
rouge	8 (6.11)	5 (3.82)	4 (3.05)	3 (2.29)	4 (3.05)	1 (0.76)

TAB. 11.12: Répartition des femelles en nombre d'individus (pourcentage) d'une classe de ponte en fonction de son alimentation. Les couleurs correspondent aux courbes de la figure 11.1 de l'échantillon 3.

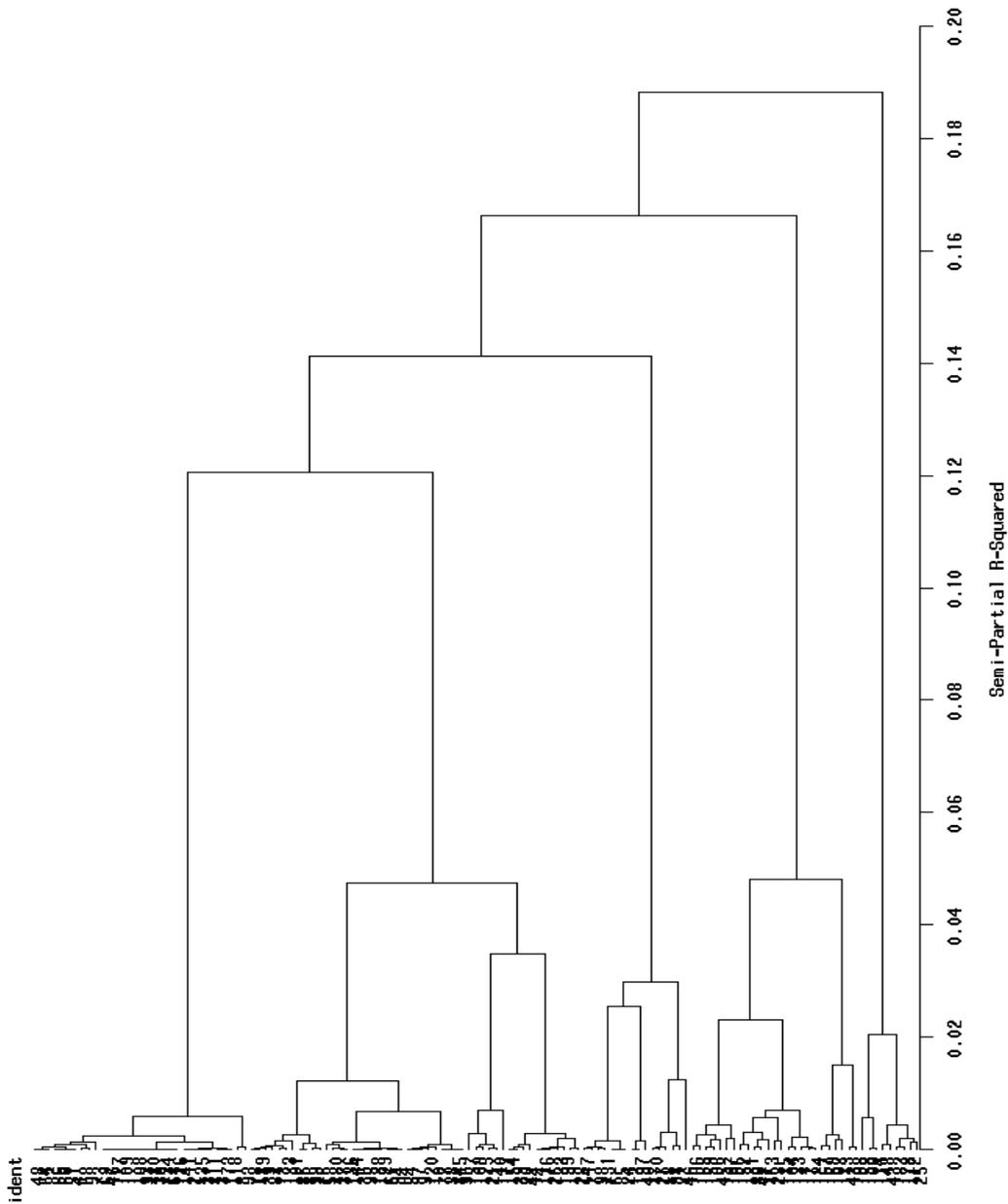


FIG. 11.3: Résultat du classement hiérarchique ascendant où sur l'axe des ordonnées est réparti 131 femelles. On coupe l'arbre à 0,06, soit 5 classes de ponte.

## 11.2 Étude de l'impact de scénarios climatiques sur la dynamique de ponte.

Dans ce paragraphe, on étudie avec le modèle *Lobesia botrana* l'impact de facteurs climatiques et/ou environnementaux sur la dynamique de ponte. Pour cela, on simule sur plusieurs générations la dynamique temporelle des populations pour observer les conséquences d'une ou de plusieurs perturbations qui se sont produites pendant la ponte des femelles de première génération. On choisit de perturber la dynamique de ponte sur 5 jours de suite ou 2 fois 2,5 jours avant, pendant ou après le pic de ponte. On propose 4 scénariis qui sont illustrés sur la figure 11.4.

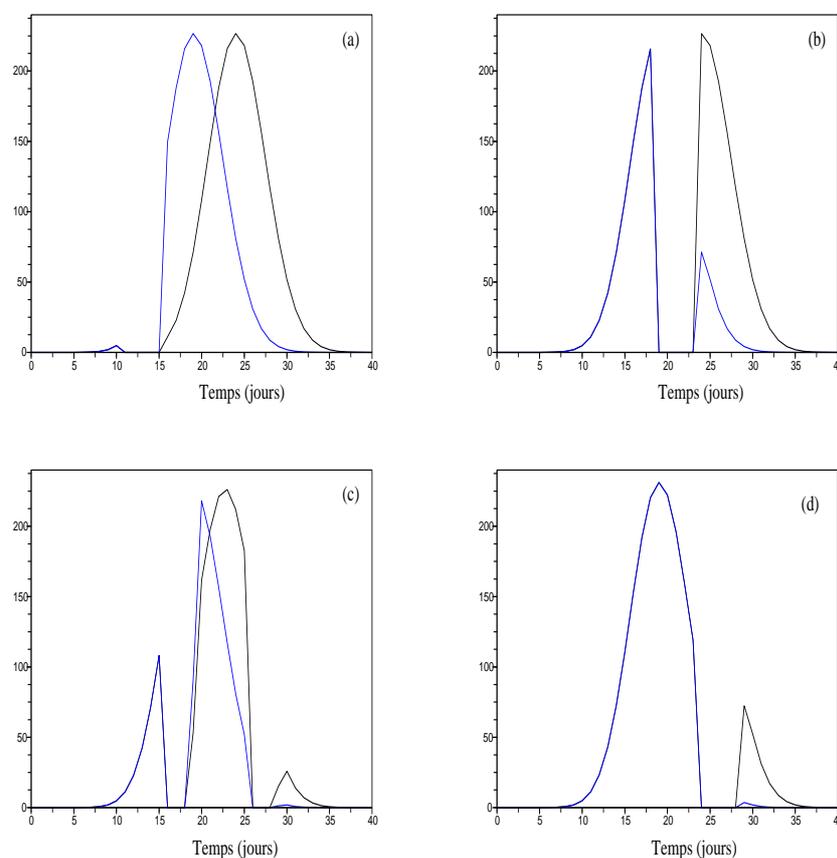


FIG. 11.4: Distributions temporelles, en nombre d'individus, de la ponte de femelles soumises à des perturbations avant (a), pendant (b), avant et après (c) et après (d) le pic de ponte. Courbe noire : les femelles pondent sans arrêt. Courbe bleue : les femelles bloquent la ponte pendant les perturbations et la reprennent après.

Pour chacun des scénariis, on suppose que les femelles en état de pondre ont deux options : elles pondent leurs oeufs ou elles bloquent la ponte pendant les jours perturbés. La dynamique de ponte ressemble dans la première situation à la courbe noire de la figure 11.4. La courbe bleue correspond à la dynamique de ponte des femelles qui choisissent la deuxième option.

### Les hypothèses biologiques.

On choisit une population de 100 chrysalides dont la différence en âge atteint environ 20 jours. Les femelles représentent 51% de cette population et émergent 3 jours après les mâles. Elles adoptent des comportements de ponte différents, en particulier ceux d'une population de femelles sauvages alimentées sur baies de raisin. Statistiquement, on a déterminé 5 comportements de ponte pour cette population (voir paragraphe précédent) dont leur représentation graphique est donnée sur la figure 11.5 (b). La durée de la ponte et la fécondité varient en fonction du comportement de ponte de la femelle, elles sont précisées dans le tableau 11.13. La répartition des 51 femelles sur les 5 classes de ponte sont respectivement de 37% pour la dynamique noire, 24% pour la dynamique bleue, 12% pour la dynamique verte, 19% pour la dynamique bleue claire, et 7% pour la dynamique rouge.

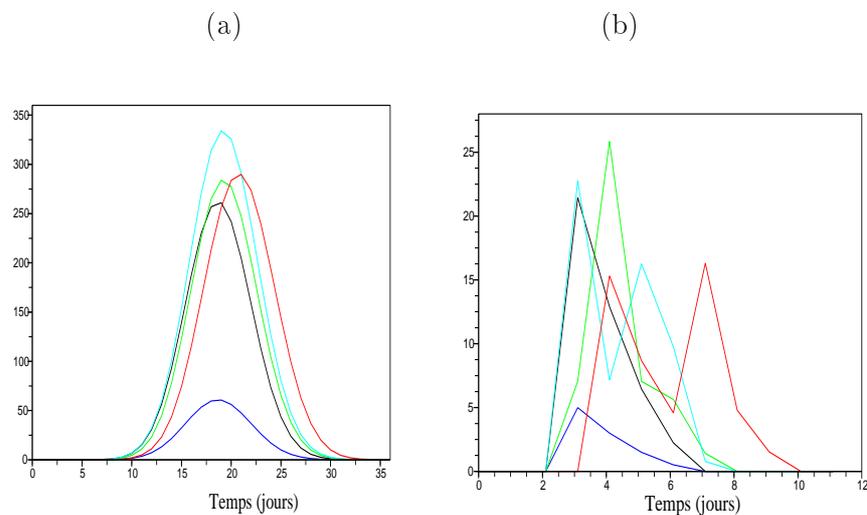


FIG. 11.5: (a) : Simulations de la dynamique temporelle de ponte, en nombre d'oeufs, de 51 femelles en fonction de leur comportement de ponte. (b) : 5 comportements de ponte d'une population de femelles sauvages alimentées en baies de raisin déterminés statistiquement.

courbe	noire	bleue	verte	bleue claire	rouge
Durée de la ponte (j)	4	4	5	5	6
fécondité (nb oeufs)	43	10	47	65	51

TAB. 11.13: Durée de la ponte et fécondité des 5 comportements de ponte déterminées statistiquement sur un échantillon de femelles sauvages alimentées en baies de raisin. Les couleurs correspondent aux dynamiques de ponte dessinées sur la figure 11.5.

Pour les nouvelles générations d'Eudémis, on suppose que le climat est constant et favorable au développement de l'insecte. La durée de développement larvaire, les différences de croissance (15 jours pour les mâles et 10 jours les femelles) et le sex ratio (51% de femelles et 49% de mâles) sont ceux mesurés sur une population alimentée en chasselas (Thiéry et al., 2006). Enfin, on suppose que les femelles ne sont pas toutes accouplées dès lors qu'elles sont 8 fois plus nombreuses que les mâles (Torres-Vila, 1999). En particulier, les femelles émergeant après les derniers mâles ont une fécondité plus faible que les femelles émergeant en même temps que les mâles.

### 11.2.1 Résultats et conclusion.

Les figures 11.6 et 11.7 représentent les simulations de la dynamique temporelle d'émergence des femelles de la troisième génération. La courbe noire est obtenue avec des femelles soumises à un environnement favorable au développement de la population. La courbe bleue est obtenue en perturbant pendant 5 jours la ponte des femelles de première génération. Les simulations dessinées sur les graphes de gauche résultent d'un choix des femelles qui est celui de pondre pendant les perturbations. Les dynamiques temporelles d'émergence tracées sur les graphes de droite de la feuille sont les conséquences d'un choix des femelles qui est celui de bloquer la ponte pendant les perturbations et de la reprendre après.

#### Les femelles choisissent de pondre pendant les perturbations.

La durée de la dynamique d'émergence des femelles de la G3 est raccourcie d'au plus 5 jours quand les perturbations ont lieu avant ou après le pic de ponte des femelles de G1. Cette durée n'est pas modifiée quand les perturbations ont lieu pendant ou 2,5 jours avant et après le pic de ponte. Des perturbations pendant 5 jours au moment de la ponte des femelles ou pendant 2 fois 2,5 jours avant et après le pic de ponte affecte le nombre de femelles participant à la dynamique de vol de la G3. Ce nombre ne varie presque pas si les perturbations ont eu lieu avant ou après le pic de ponte.

#### Les femelles choisissent de pondre après les perturbations.

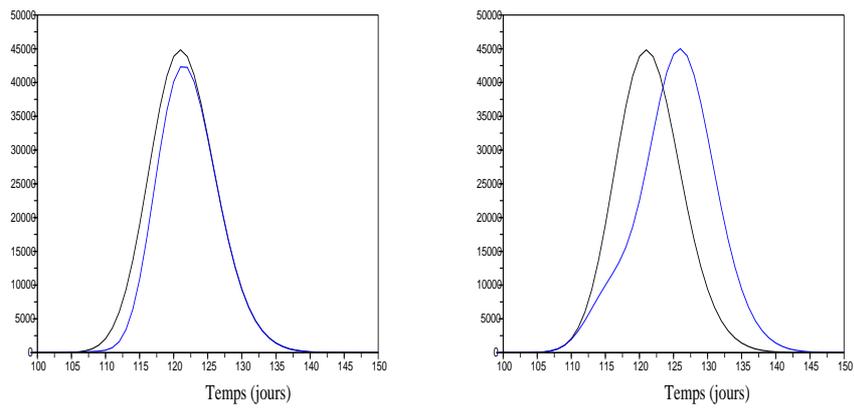
La durée de la dynamique d'émergence des femelles de la G3 est allongée du même nombre de jours que celui des perturbations dans chacun des scénariis testés. Le nombre d'individus augmente lorsque les femelles reportent leur ponte car l'accouplement entre les mâles et femelles est plus important surtout en fin de dynamique d'émergence des deux populations.

#### Conclusion.

Des facteurs de mortalité comme par exemple un traitement phytosanitaire ou des prédateurs d'oeufs actifs pendant 5 jours de suite au moment de la dynamique de ponte ou pendant 2 fois 2,5 jours avant et après le pic de ponte font chuter la taille de la population Eudémis. Des facteurs climatiques comme par exemple la pluie, l'orage ou des températures froides présents durant 5 jours avant ou pendant la ponte des femelles augmentent le nombre d'individus au cours des générations et allongent dans le temps la dynamique des populations. Ces scénariis peuvent se produire au printemps après la période de diapause ou pendant les cycles de l'insecte pendant l'été.

L'étude de l'impact de scénarios climatiques sur la dynamique de ponte est transposable à d'autres dynamiques de l'Eudémis. Par exemple, la dynamique d'éclosion peut être perturbée par des facteurs de mortalité comme un temps sec ou des facteurs d'étalement comme la température. Dans ce cas, la dynamique des populations des générations suivantes ressembleront aux dynamiques simulées présentées dans ce paragraphe.

## Perturbations pendant 5 jours avant le pic de ponte



## Perturbations pendant 5 jours pendant le pic de ponte

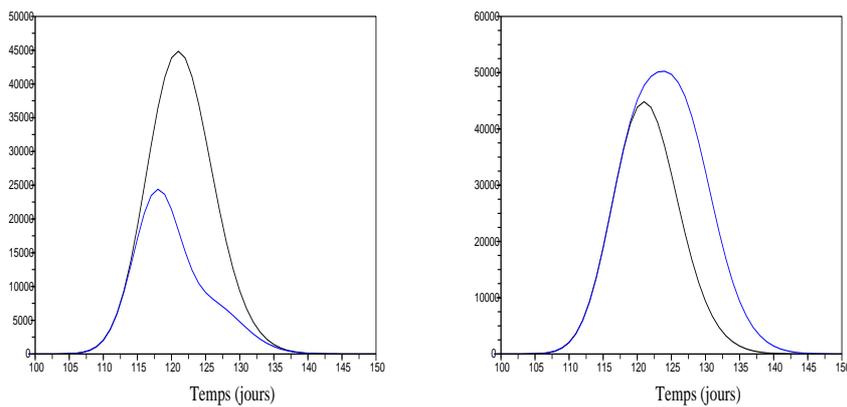
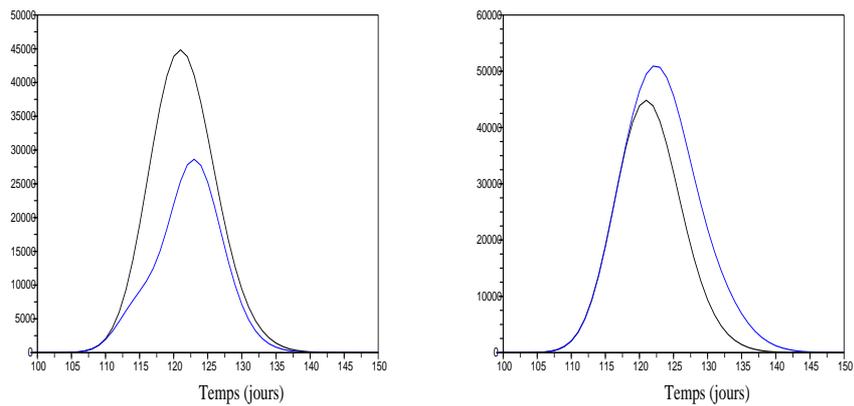


FIG. 11.6: Dynamiques temporelles d'émergence des femelles de la troisième génération simulées par le modèle *Lobesia botrana*. Courbe noire : les femelles de première génération n'ont subi aucune perturbation. Courbes bleue : les femelles ont été soumises à des perturbations.

Perturbations pendant 2,5 jours avant et après le pic de ponte



Perturbations pendant 5 jours après le pic de ponte

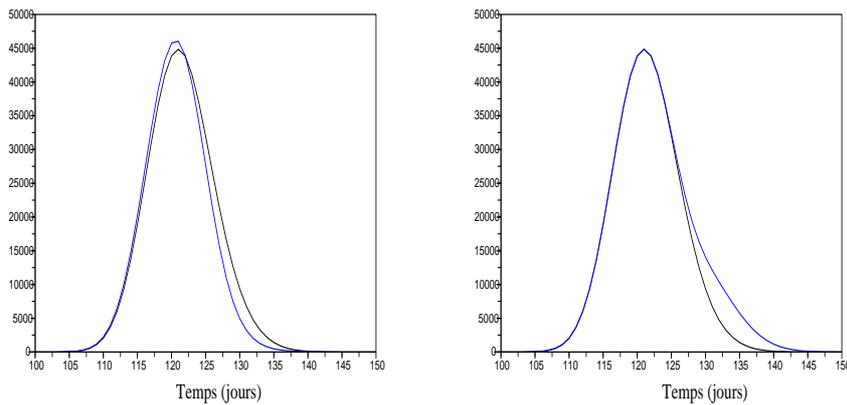


FIG. 11.7: Dynamiques temporelles d'émergence des femelles de la troisième génération simulées par le modèle *Lobesia botrana*. Courbe noire : les femelles de première génération n'ont subi aucune perturbation. Courbes bleue : les femelles ont été soumises à des perturbations.

## Quatrième partie

# Contrôle des populations d'Eudémis de la vigne.



On s'intéresse dans cette partie au contrôle des populations d'Eudémis de la vigne. Les moyens de lutte utilisés contre cet insecte sont par exemple les produits phytosanitaires, la confusion sexuelle et la toxine BT. Le mode de fonctionnement de ces méthodes est détaillé dans le chapitre 1 de cette thèse. Les insecticides sont utilisés pour tuer les oeufs à chaque génération et les larves de deuxième génération car la chenille est plus facilement accessible contrairement en première génération où elle est cachée dans son cocon de soie. La durée de vie de ces produits chimiques est d'environ 4 à 5 semaines. En G1, le produit le plus efficace pour réduire les populations d'Eudémis est la toxine BT. La fenêtre d'action de ce produit est plus courte que les produits phytosanitaires obligeant ainsi à optimiser la période d'application. Le meilleur positionnement de ce produit est juste avant l'éclosion des larves, c'est à dire pendant le stade "tête noire" du développement de l'oeuf. Une troisième méthode est utilisée par les viticulteurs pour réduire la population de cet insecte, c'est la confusion sexuelle. Cet outil sert à perturber la rencontre entre le mâle et la femelle, diminuant ainsi le nombre de femelles fécondées. Ce moyen de lutte peut être appliqué sur toute la saison mais s'est avéré plus efficace en G3 contrairement aux produits phytosanitaires (Friedrich et al., 2002).

Dans cette partie, on modélise ces différents moyens de lutte dans le modèle *Lobesia botrana* afin de déterminer la meilleure fenêtre temporelle pour l'application de ces produits. Bien que la cible visée n'est pas la même pour toutes ces méthodes, l'objectif consiste à réduire la population de larves. Soit  $v$  le moyen utilisé pour réduire la population larvaire. On cherche alors à déterminer  $v$  le contrôle de la population tel que son impact sur la taille de cette population larvaire soit efficace dans le temps et tel que la quantité de produit utilisée est optimale.

On choisit de structurer la population selon les stades oeuf, larve et femelle. Le rôle des mâles dans le taux d'accouplement est négligé dans cette partie. On suppose que cette population d'Eudémis est localisée sur une même parcelle et qu'elle ne se mélange pas à d'autres populations venant de parcelles voisines. Les variations climatiques sont constantes sur toute la saison et ne modifient pas le comportement dans le temps de la population. Le modèle décrivant la dynamique temporelle de cette population dans cet environnement est

$$\begin{cases} \frac{\partial u^e}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^e}{\partial a}(t, a) = -\beta^e(a)u^e(t, a) - m^e(a)u^e(t, a), & t > 0 \quad a \in [0, L^e], \\ \frac{\partial u^l}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^l}{\partial a}(t, a) = -\beta^l(a)u^l(t, a) - m^l(a)u^l(t, a), & t > 0 \quad a \in [0, L^l], \\ \frac{\partial u^f}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^f}{\partial a}(t, a) = -m^f(a)u^f(t, a), & t > 0 \quad a \in [0, L^f], \end{cases} \quad (11.1)$$

où  $u^e$ ,  $u^l$  et  $u^f$  sont les densités d'individus des stades de développement oeuf, larve et femelle. Les fonctions  $\beta^e$  et  $\beta^l$  sont le taux d'éclosion et le taux d'émergence en fonction de l'âge de l'insecte. Les fonctions  $m^k$  pour  $k$  égal à  $e, l, f$  sont les taux de mortalité des stades de développement oeuf, larve et femelle en fonction de l'âge de l'insecte. Les conditions de renouvellement de ces trois équations sont données par

$$\begin{cases} u^e(t, 0) = \int_0^{L^f} \beta^f(a)u^f(t, a)da, & t > 0, \\ u^l(t, 0) = \int_0^{L^e} \beta^e(a)u^e(t, a)da, & t > 0, \\ u^f(t, 0) = \int_0^{L^l} \beta^l(a)u^l(t, a)da, & t > 0, \end{cases} \quad (11.2)$$

où  $\beta^f$  modélise le taux de ponte moyen en fonction de l'âge de la femelle. Les données initiales sont égales à

$$u^k(0, a) = u_0^k(a), \quad a \in [0, L^k], \quad k = e, l, f \quad (11.3)$$

Les hypothèses faites sur les fonctions démographiques constituant le modèle sont les suivantes

**H 13** Les fonctions  $\beta^e(a)$  et  $\beta^l(a)$  sont bornées, non négatives par rapport à la variable âge.

**H 14** Le taux de ponte  $\beta^f(a)$  est borné, non négatif par rapport à la variable âge.

**H 15** Les fonctions de mortalité  $m^k(a)$ , pour  $k$  égal à  $e, l, f, m$  sont non négatives et localement intégrables par rapport à la variable âge,

$$\int_0^{L^k} m^k(a) da = +\infty, \quad k = e, l, f.$$

**H 16** Les données initiales  $u_0^k$ , pour  $k$  égal à  $e, l, f, m$  sont non négatives et dans l'espace  $L^2([0, L^k])$ .

Les problèmes de contrôle abordés dans les chapitres suivants sont le contrôle des populations Eudémis à partir d'un traitement phytosanitaire appliqué sur les oeufs ou les larves et le contrôle des populations Eudémis à partir de la confusion sexuelle des papillons. Deux problèmes sont étudiés dans le contrôle des populations avec des produits chimiques. Ces problèmes diffèrent par rapport au positionnement des produits pendant le cycle de développement de l'insecte.

## Chapitre 12

# Contrôle des populations Eudémis à partir des pontes.

On modélise le contrôle de la population larvaire à partir de produits phytosanitaires du type ovicides. Le meilleur positionnement de ces produits est au moment de la ponte des oeufs. La dynamique de ponte est modélisée dans le système (11.1)-(11.2)-(11.3) par l'équation

$$u^e(t, 0) = \int_0^{L^f} \beta^f(a) u^f(t, a) da, \quad t > 0,$$

Le nombre d'oeufs pondus par unité de temps  $t$  est modifié quand la population oeuf est soumise à un traitement phytosanitaire appliqué pendant la ponte des femelles et devient

$$u^e(t, 0) = \int_0^{L^f} \beta^f(a) u^f(t, a) da - v(t), \quad t > 0,$$

Plus la fonction  $v$  est importante, plus la population oeuf et donc larvaire diminue. L'unité du contrôle  $v$  est le nombre d'individus oeufs tués par unité de temps  $t$ .

### 12.1 Formulation et résolution du problème de contrôle.

On calcule  $v$  à partir du problème de minimisation suivant

$$[\mathbf{P}_7] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{v \in K} \left[ \eta \int_0^T v^2(t) dt + \mu \int_0^T \left( \int_0^{L^l} u^l(t, a) da \right)^2 dt \right], \\ \text{où } u^l \text{ est solution du système (12.1) suivant} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^e}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^e}{\partial a}(t, a) = -\beta^e(a) u^e(t, a) - m^e(a) u^e(t, a), \quad a \in [0, L^e] \\ \frac{\partial u^l}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^l}{\partial a}(t, a) = -\beta^l(a) u^l(t, a) - m^l(a) u^l(t, a), \quad a \in [0, L^l] \\ \frac{\partial u^f}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^f}{\partial a}(t, a) = -m^f(a) u^f(t, a), \quad a \in [0, L^f] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u^e(t, 0) = \int_0^{L^f} \beta^f(a) u^f(t, a) da - v(t), \quad t > 0 \\ u^l(t, 0) = \int_0^{L^e} \beta^e(a) u^e(t, a) da, \quad t > 0 \\ u^f(t, 0) = \int_0^{L^l} \beta^l(a) u^l(t, a) da, \quad t > 0 \end{array} \right. \\ u^k(0, a) = u_0^k(a), \quad a \in [0, L^k], \quad k = e, l, f \end{array} \right. \quad (12.1)$$

Les constantes  $\eta$  et  $\mu$  sont prises inférieures ou égales à 1. Si l'objectif est de tuer les chenilles sans contraintes sur la quantité de produits chimiques utilisés alors on étudie le problème  $[P_7]$  avec  $\eta$  égal à la valeur nulle. Dans ce cas, le contrôle est égal à

$$v(t) = \int_0^{L^f} \beta^f(a) u^f(t, a) da.$$

A l'inverse, si l'objectif est de diminuer le nombre de larves sur la parcelle en optimisant la quantité d'intrants phytosanitaire alors on étudie le problème  $[P_7]$  avec  $\eta$  et  $\mu$  sont non nuls. Le domaine  $K$  est l'ensemble des solutions admissibles défini par

$$K = \{g(t) \in L^\infty([0, T]), 0 \leq g \leq \bar{g}\},$$

où  $T$  est choisit grand. On note  $\mathcal{J}(v)$  la fonction coût du problème  $[P_7]$ .

**Théorème 18** *Le problème  $[P_7]$  admet au moins un optimum.*

**Preuve :** Soit  $d$  la borne inférieure de la fonction coût  $\mathcal{J}(v)$  et soit  $\{v_n\}$ , où  $n$  est un entier non nul, une suite minimisante de l'espace  $K$  telle que

$$d < \mathcal{J}(v_n) \leq d + \frac{1}{n}. \quad (12.2)$$

La fonction coût au point  $\{v_n\}$  est égale à

$$\mathcal{J}(v_n) = \eta \int_0^T v_n^2(t) dt + \mu \int_0^T \left( \int_0^{L^l} u_n^l(t, a) da \right)^2 dt,$$

où la densité  $u_n^l$  est obtenue, pour tous  $a$  dans l'intervalle  $[0, L^l]$  et  $t$  dans l'intervalle  $[0, T]$ , en résolvant le système (12.1) par la méthode des caractéristiques avec  $v$  égal à  $v_n$ .

La suite  $\{v_n\}$  est bornée dans l'espace  $L^2([0, T])$ , par conséquent elle admet une sous suite, notée  $\{v_{n_k}\}_k$ , qui converge faiblement vers la limite  $v^*$  dans l'espace  $L^2([0, T])$ . D'après le théorème 1, le système (12.1) admet une unique solution qui est donnée par

$$u_{n_k}^j(t, a) = \begin{cases} u_0^j(a-t) e^{-\int_0^t \beta^j(s) ds}, & a > t \\ u^j(t-a, 0) e^{-\int_0^a \beta^j(s) ds}, & a \leq t, \end{cases}$$

pour  $j = e, l, f$ . Sous les hypothèses (H 13)-(H 14)-(H 15)-(H 16), les suites  $u_{n_k}^e$ ,  $u_{n_k}^l$  et  $u_{n_k}^f$  sont bornées dans respectivement l'espace  $L^2([0, L^j] \times [0, T])$  pour  $j$  égal à  $e, l, f$ . On peut alors extraire de ces suites une sous suite, notée respectivement  $\{\tilde{u}_{n_k}^e\}_k$ ,  $\{\tilde{u}_{n_k}^l\}_k$  et  $\{\tilde{u}_{n_k}^f\}_k$  qui convergent faiblement vers les limites respectives  $u_*^e$ ,  $u_*^l$  et  $u_*^f$  sur  $L^2([0, L^j] \times [0, T])$  pour  $j$  égal à  $e, l, f$ . Les populations totales oeuf, larve et papillon données par

$$P_{n_k}^j(t) = \int_0^{L^j} \tilde{u}_{n_k}^j(t, s) ds, \quad j = e, l, f,$$

sont bornées. Le calcul de la dérivée des populations totales est donné en intégrant la première équation de (12.1) sur le domaine  $[0, T] \times [0, L^e]$ , la deuxième équation sur le domaine  $[0, T] \times [0, L^l]$  et la troisième équation sur le domaine  $[0, T] \times [0, L^f]$ , on obtient

$$\partial_t P_{n_k}^e(t) = \int_0^{L^f} \beta^f(s) \tilde{u}_{n_k}^f(t, s) ds - v(t) - \int_0^{L^e} \beta^e(s) \tilde{u}_{n_k}^e(t, s) ds - \int_0^{L^e} m^e(s) \tilde{u}_{n_k}^e(t, s) ds,$$

$$\partial_t P_{n_k}^l(t) = \int_0^{L^e} \beta^e(s) \tilde{u}_{n_k}^e(t, s) ds - \int_0^{L^l} \beta^l(s) \tilde{u}_{n_k}^l(t, s) ds - \int_0^{L^l} m^l(s) \tilde{u}_{n_k}^l(t, s) ds,$$

$$\partial_t P_{n_k}^f(t) = \int_0^{L^l} \beta^l(s) \tilde{u}_{n_k}^l(t, s) ds - \int_0^{L^f} m^f(s) \tilde{u}_{n_k}^f(t, s) ds,$$

on majore les termes négatifs de ces équations pour avoir les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}\partial_t P_{n_k}^e(t) &\leq \int_0^{L^e} \beta^f(s) \tilde{u}_{n_k}^f(t, s) ds, \\ \partial_t P_{n_k}^l(t) &\leq \int_0^{L^e} \beta^e(s) \tilde{u}_{n_k}^e(t, s) ds, \\ \partial_t P_{n_k}^f(t) &\leq \int_0^{L^l} \beta^l(s) \tilde{u}_{n_k}^l(t, s) ds.\end{aligned}$$

Ces suites sont bornées. On déduit alors que les fonctions  $P_{n_k}^e$ ,  $P_{n_k}^l$  et  $P_{n_k}^f$  convergent uniformément vers respectivement  $P_*^e$ ,  $P_*^l$ ,  $P_*^f$ . Par unicité de la limite, on déduit que

$$P_*^l = \int_0^{L^l} u_*^l(t, s) ds.$$

On conclut alors la preuve par

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(v_{n_k}) &= \eta \int_0^T (v_{n_k})^2(t) dt + \mu \int_0^T (\tilde{P}_{n_k}^l(t))^2 dt \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \eta \int_0^T (v^*)^2(t) dt + \mu \int_0^T (P_*^l(t))^2 dt = \mathcal{J}(v^*) = d.\end{aligned} \quad \square$$

On résout le problème d'optimisation  $[P_7]$  en étudiant la fonction Lagrangienne. On formule cette fonction en ajoutant les équations aux dérivées partielles et les conditions aux limites de (12.1) dans la fonction coût via l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange. Soient  $p$  et  $h$  les variables de Lagrange. Le premier vecteur  $p$  est égal à  $(p^e, p^l, p^f)$  et le second vecteur est égal à  $(h^e, h^l, h^f)$ . On note  $S$  le vecteur  $(v, p, h)$ , le Lagrangien s'écrit en ce point

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(S) &= \mathcal{J}(v) + \int_0^T \int_0^{L^e} [\partial_t u^e + \partial_a u^e + \beta^e(a) u^e + m^e(a) u^e] p^e(t, a) da dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^{L^l} [\partial_t u^l + \partial_a u^l + \beta^l(a) u^l + m^l(a) u^l] p^l(t, a) da dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^{L^f} [\partial_t u^f + \partial_a u^f + m^f(a) u^f] p^f(t, a) da dt \\ &\quad + \int_0^T \left[ u^e(t, 0) + v(t) - \int_0^{L^f} \beta^f(s) u^f(t, s) ds \right] h^e(t) dt \\ &\quad + \int_0^T \left[ u^l(t, 0) - \int_0^{L^e} \beta^e(s) u^e(t, s) ds \right] h^l(t) dt \\ &\quad + \int_0^T \left[ u^f(t, 0) - \int_0^{L^l} \beta^l(s) u^l(t, s) ds \right] h^f(t) dt\end{aligned}$$

Le vecteur  $S^*$  est un optimum de  $\mathcal{L}$  si et seulement si le gradient de la fonction Lagrangienne est nul à l'optimum.

La dérivée du Lagrangien par rapport aux variables  $p$  à l'optimum  $S^*$  donne le problème d'évolution (12.1). La dérivée du Lagrangien par rapport aux variables  $h$  donnent les conditions de renouvellement de chaque densité  $u^k$ , pour  $k$  égal à  $e, l, f$ . Le problème adjoint s'obtient en

dérivant le Lagrangien au point  $S^*$  par rapport aux densités  $u^e$ ,  $u^l$  et  $u^f$  et s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial t} p^e(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} p^e(t, a) + \beta^e(a) p^e(t, a) + m^e(a) p^e(t, a) = p^l(t, 0) \beta^e(a), \quad a \in [0, L^e], \\ -\partial_t p^l(t, a) - \partial_a p^l(t, a) + \beta^l(a) p^l(t, a) + m^l(a) p^l(t, a) = \beta^l(a) p^f(t, 0) \\ \quad - 2\mu \int_0^{L^l} u^l(t, a) da, \quad a \in [0, L^l], \\ -\partial_t p^f - \partial_a p^f + m^f(a) p^f(t, a) = \beta^f(a) p^e(t, 0), \quad a \in [0, L^f], \\ p^e(T, a) = 0, \quad a \in [0, L^e], \\ p^l(T, a) = 0, \quad a \in [0, L^l], \\ p^f(T, a) = 0, \quad a \in [0, L^f], \\ p^e(t, L^e) = p^l(t, L^l) = p^f(t, L^f) = 0. \end{array} \right. \quad (12.3)$$

où  $t$  est défini dans l'intervalle  $[0, T]$ . Par la méthode des caractéristiques, les équations de ce système admettent une solution.

**Théorème 19** *Sous les hypothèses (H 13)- (H 14)- (H 15), et  $\int_0^{L^l} u^l(t, a) da \geq 0$ , le système (12.3) admet une unique solution  $(p^e, p^l, p^f)$  où chaque fonction  $p^k$  est dans l'espace  $L^2([0, T] \times [0, L^k])$  pour  $k$  égal à  $e, l, f$ .*

**Preuve :** Soit  $\lambda$  une constante positive. Introduisons le changement de variables

$$p^e(t, a) = e^{\lambda t} \tilde{p}^e(t, a), \quad p^l(t, a) = e^{\lambda t} \tilde{p}^l(t, a), \quad p^f(t, a) = e^{\lambda t} \tilde{p}^f(t, a). \quad (12.4)$$

On considère maintenant le système

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p}^e(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} \tilde{p}^e(t, a) + \beta^e(a) \tilde{p}^e(t, a) + m^e(a) \tilde{p}^e(t, a) + \lambda \tilde{p}^e(t, a) = \beta^e(a) \phi(t), \quad a \in [0, L^e], \\ -\partial_t \tilde{p}^l(t, a) - \partial_a \tilde{p}^l(t, a) + \beta^l(a) \tilde{p}^l(t, a) + m^l(a) \tilde{p}^l(t, a) + \lambda \tilde{p}^l(t, a) = \beta^l(a) \tilde{p}^f(t, 0) \\ \quad - 2\mu \int_0^{L^l} u^l(t, a) da, \quad a \in [0, L^l], \\ -\partial_t \tilde{p}^f - \partial_a \tilde{p}^f + m^f(a) \tilde{p}^f(t, a) + \lambda \tilde{p}^f(t, a) = \beta^f(a) \tilde{p}^e(t, 0), \quad a \in [0, L^f], \\ \tilde{p}^e(T, a) = 0, \quad a \in [0, L^e], \\ \tilde{p}^l(T, a) = 0, \quad a \in [0, L^l], \\ \tilde{p}^f(T, a) = 0, \quad a \in [0, L^f], \\ \tilde{p}^e(t, L^e) = \tilde{p}^l(t, L^l) = \tilde{p}^f(t, L^f) = 0. \end{array} \right. \quad (12.5)$$

pour  $t$  défini dans l'intervalle  $[0, T]$ . La fonction  $\phi$  est définie dans l'espace  $L^2([0, T])$ . Par la méthode des caractéristiques, ce système admet une solution  $(\tilde{p}^e, \tilde{p}^l, \tilde{p}^f)$ .

**Lemme 17** *Soit l'application  $\Lambda$  définie par :*

$$\begin{aligned} \Lambda : L^2([0, T]) &\rightarrow L^2([0, T]) \\ \phi &\rightarrow \tilde{p}^l(t, 0) \end{aligned}$$

où  $\tilde{p}^l(t, 0)$  est l'unique solution de (12.5). Si  $\lambda$  satisfait la relation

$$\lambda > 2 \left( \int_0^{L^l} (\beta^l(a))^2 da \int_0^{L^f} (\beta^f(a))^2 da \int_0^{L^e} (\beta^e(a))^2 da \right)^{1/3},$$

alors  $\Lambda$  est contractante .

Si  $\lambda$  vérifie la condition du lemme 17, alors le problème (12.5) admet une unique solution. A l'aide du changement de variable (12.4), on montre que le problème initial (12.3) admet une unique solution.

**Preuve du lemme :** Soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  des fonctions de l'espace  $L^2([0, T])$  satisfaisant le problème (12.5). On pose

$$\phi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) \quad \text{et} \quad \tilde{p}^k(t, a) = \tilde{p}_1^k(t, a) - \tilde{p}_2^k(t, a), \quad a \in [0, L^k], \quad t \in [0, T], \quad k = e, l, f.$$

Ces fonctions vérifient le système suivant

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p}^e(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} \tilde{p}^e(t, a) + \beta^e(a) \tilde{p}^e(a, t) + m^e(a) \tilde{p}^e(a, t) + \lambda \tilde{p}^e(t, a) = \phi(t) \beta^e(a), & a \in [0, L^e], \\ -\partial_t \tilde{p}^l(t, a) - \partial_a \tilde{p}^l(t, a) + m^l(a) \tilde{p}^l(t, a) + \beta^l(a) \tilde{p}^l(t, a) + \lambda \tilde{p}^l(t, a) = \beta^l(a) \tilde{p}^f(t, 0), & a \in [0, L^l], \\ -\partial_t \tilde{p}^f - \partial_a \tilde{p}^f + m^f(a) \tilde{p}^f(t, a) + \lambda \tilde{p}^f(t, a) = \beta^f(a) \tilde{p}^e(t, 0), & a \in [0, L^f], \\ \tilde{p}^e(T, a) = 0, & a \in [0, L^e], \\ \tilde{p}^l(T, a) = 0, & a \in [0, L^l], \\ \tilde{p}^f(T, a) = 0, & a \in [0, L^f], \\ \tilde{p}^e(t, L^e) = \tilde{p}^l(t, L^l) = \tilde{p}^f(t, L^f) = 0, \end{cases}$$

pour  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0, T]$ . On multiplie la première équation de ce système par  $\tilde{p}^e$ , puis on intègre sur le domaine  $[0, T] \times [0, L^e]$ . De la même façon, la deuxième et la troisième équation sont respectivement multipliées par  $\tilde{p}^l$  et  $\tilde{p}^f$  puis intégrées sur le domaine  $[0, T] \times [0, L^k]$  pour  $k$  égal à  $l, f$ . Après simplifications, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{p}^e(t, 0))^2 dt + \lambda \int_0^T \int_0^{L^e} (\tilde{p}^e(t, a))^2 da dt &\leq \int_0^T \int_0^{L^e} \phi(t, 0) \beta^e(a) \tilde{p}^e(t, a) da dt, \\ \frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{p}^l(t, 0))^2 dt + \lambda \int_0^T \int_0^{L^l} (\tilde{p}^l(t, a))^2 da dt &\leq \int_0^T \int_0^{L^l} \beta^l(a) \tilde{p}^f(t, 0) \tilde{p}^l(t, a) da dt, \\ \frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{p}^f(t, 0))^2 dt + \lambda \int_0^T \int_0^{L^f} (\tilde{p}^f(t, a))^2 da dt &\leq \int_0^T \int_0^{L^f} \beta^f(a) \tilde{p}^e(t, 0) \tilde{p}^f(t, a) da dt. \end{aligned} \quad (12.6)$$

On applique l'inégalité de Young sur les termes à droite de ces inégalités

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^{L^e} \phi(t, 0) \beta^e(a) \tilde{p}^e(t, a) da dt &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \int_0^{L^e} (\beta^e(a))^2 da \int_0^{L^e} (\tilde{p}^e(t, a))^2 da dt + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^T \phi^2(t, 0) dt, \\ \int_0^T \int_0^{L^l} \beta^l(a) \tilde{p}^f(t, 0) \tilde{p}^l(t, a) da dt &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \int_0^{L^l} (\beta^e(a))^2 da \int_0^{L^e} (\tilde{p}^l(t, a))^2 da dt + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^T (\tilde{p}^f(t, 0))^2 dt, \\ \int_0^T \int_0^{L^f} \beta^f(a) \tilde{p}^e(t, 0) \tilde{p}^f(t, a) da dt &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \int_0^{L^f} (\beta^f(a))^2 da \int_0^{L^f} (\tilde{p}^f(t, a))^2 da dt + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^T (\tilde{p}^e(t, 0))^2 dt, \end{aligned}$$

où  $\epsilon$  est une constante positive. Pour  $\epsilon = \frac{\lambda}{2}$ , le système (12.6) devient

$$\begin{aligned} \int_0^T (\tilde{p}^e(t, 0))^2 dt &\leq 2 \frac{\|\beta^e\|_{L^2([0, L^e])}^2}{\lambda} \int_0^T \phi^2(t, 0) dt \\ \frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{p}^l(t, 0))^2 dt &\leq \frac{\|\beta^l\|_{L^2([0, L^l])}^2}{\lambda} \int_0^T (\tilde{p}^f(t, 0))^2 dt \\ \int_0^T (\tilde{p}^f(t, 0))^2 dt &\leq 2 \frac{\|\beta^f\|_{L^2([0, L^f])}^2}{\lambda} \int_0^T (\tilde{p}^e(t, 0))^2 dt \end{aligned}$$

Le terme à droite de la deuxième inégalité a un majorant qui est donné par la dernière inégalité, on déduit alors

$$\int_0^T (\tilde{p}^e(t, 0))^2 dt \leq 2 \frac{\|\beta^e\|_{L^2([0, L^e])}^2}{\lambda} \int_0^T \phi^2(t, 0) dt,$$

$$\frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{p}^l(t, 0))^2 dt \leq 2 \frac{\|\beta^l\|_{L^2([0, L^l])}^2}{\lambda} \frac{\|\beta^f\|_{L^2([0, L^f])}^2}{\lambda} \int_0^T (\tilde{p}^e(t, 0))^2 dt.$$

En injectant la première inégalité dans la seconde on obtient une estimation sur la norme  $L^2$  de la fonction  $\tilde{p}^l$  à l'âge 0 qui est

$$\int_0^T (\tilde{p}^l(t, 0))^2 dt \leq K \int_0^T \phi^2(t, 0) dt$$

où  $K = 8 \frac{\|\beta^e\|_{L^2([0, L^e])}^2 \|\beta^l\|_{L^2([0, L^l])}^2 \|\beta^f\|_{L^2([0, L^f])}^2}{\lambda^3}$ . En posant

$$\lambda > 2 \left( \|\beta^e\|_{L^2([0, L^e])}^2 \|\beta^l\|_{L^2([0, L^l])}^2 \|\beta^f\|_{L^2([0, L^f])}^2 \right)^{1/3}$$

on montre que l'application  $\Lambda$  est contractante.  $\square$

La dérivée du Lagrangien par rapport au contrôle  $v$  est donnée par

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}, k \right\rangle_{L^2([0, T])} = \int_0^T [2\eta v(t) + p^e(t, 0)] k(t) dt$$

pour toute fonction  $k$  dans  $L^2([0, T])$ . L'optimum du problème  $[P_7]$  vérifie la relation

$$2\eta v^*(t) = -p_*^e(t, 0),$$

où  $p_*^e(t, 0)$  dépend des fonctions  $p_*^l(t, 0)$  et  $p_*^f(t, 0)$ . Ces fonctions sont obtenues en résolvant le système (12.5) par la méthode des caractéristiques et sont données par

$$p_*^e(t, a) = \begin{cases} \int_t^T \beta^e(a) p_*^l(s, 0) e^{-\int_t^s (\beta^e(\tau) + m^e(\tau)) d\tau} ds, & a > t, \\ \int_a^{L^e} \beta^e(s) p_*^l(t, 0) e^{-\int_a^s (\beta^e(\tau) + m^e(\tau)) d\tau} ds, & a \leq t, \end{cases}$$

$$p_*^l(t, a) = \begin{cases} \int_t^T \left[ \beta^l(a) p_*^f(s, 0) - 2\mu \int_0^{L^l} u^l(s, x) dx \right] e^{-\int_t^s (\beta^l(\tau) + m^l(\tau)) d\tau} ds, & a > t, \\ \int_a^{L^l} \left[ \beta^l(s) p_*^f(t, 0) - 2\mu \int_0^{L^l} u^l(t, x) dx \right] e^{-\int_a^s (\beta^l(\tau) + m^l(\tau)) d\tau} ds, & a \leq t, \end{cases}$$

$$p_*^f(t, a) = \begin{cases} \int_t^T \beta^f(a) p_*^e(s, 0) e^{-\int_t^s m^f(\tau) d\tau} ds, & a > t, \\ \int_a^{L^f} \beta^f(s) p_*^e(t, 0) e^{-\int_a^s m^f(\tau) d\tau} ds, & a \leq t, \end{cases}$$

pour tous  $t$  dans l'intervalle  $[0, T]$ . Ces fonctions ne dépendent pas du contrôle  $v$ .

## 12.2 Étude numérique du problème de contrôle.

Dans ce paragraphe, on cherche une solution numérique au problème d'estimation  $[P_7]$ . Pour cela, on choisit d'approcher ce problème sur le maillage défini au chapitre 5. Pour simplifier, on dénote  $L$  l'âge maximal de vie de tous les stades de développement. On discrétise l'intervalle des âges en  $N_a + 1$  points tel que

$$[0, L] = U_i[a_{i-\frac{1}{2}}, a_{i+\frac{1}{2}}[, \quad i = 0, N_a$$

où  $\Delta a$  est le pas de discrétisation en âge et les mailles  $a_{i+\frac{1}{2}}$  sont calculées par

$$a_{i-\frac{1}{2}} = (i - \frac{1}{2})\Delta a, \quad i = 1, N_a - 1.$$

L'intervalle en temps est discrétisé en  $N_t + 1$  points tel que

$$t^n = n\Delta t, \quad n = 0, N_t,$$

où  $\Delta t$  est le pas de discrétisation en temps. Le système aux dérivées partielles donné dans (12.1) est approché par un schéma aux volumes finis (VF)

$$\begin{aligned} u_i^{e,n+1} &= \frac{u_i^{e,n}(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e,n}}{1 + \Delta t \beta_i^e + \Delta t m_i^e}, \\ u_i^{l,n+1} &= \frac{u_i^{l,n}(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{l,n}}{1 + \Delta t \beta_i^l + \Delta t m_i^l}, \\ u_i^{f,n+1} &= \frac{u_i^{f,n}(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{f,n}}{1 + \Delta t m_i^f}, \end{aligned} \quad (12.7)$$

pour  $i$  allant de 1 à  $N_a$  et pour  $n$  allant de 0 à  $N_t$ . Les conditions aux limites du système (12.1) sont approchées par

$$\begin{aligned} u_0^{e,n} &= \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^f u_i^{f,n} - v^n, \\ u_0^{l,n} &= \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^e u_i^{e,n}, \\ u_0^{f,n} &= \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i^l u_i^{l,n}, \end{aligned} \quad (12.8)$$

pour  $n =$  allant de 0 à  $N_t$ . La donnée initiale est approchée pour chaque stade par

$$u_i^{k,0} = \frac{1}{\Delta a} \int_{C_i} u_0^k(a) da, \quad i = 1, N_a, \quad k = e, l, f \quad (12.9)$$

où  $C_i$  est égal à  $[a_{i-\frac{1}{2}}, a_{i+\frac{1}{2}}[$  pour tous  $i$ . La fonction coût s'écrit sur ce maillage

$$Min_{v_\Delta} \{ J_\Delta(v_\Delta) = \eta \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} (v^n)^2 + \mu \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} u_i^{l,n} \right]^2 \}$$

où  $u_i^{l,n}$  pour  $i = 1, N_a$  et  $n > 0$  est calculé par le schéma VF. On note  $u_\Delta^k$  la fonction égale à  $u_i^{l,n}$  lorsque  $a \in C_i$  et  $t \in [t^n, t^{n+1}[$  pour tous les âges  $i = 1, N_a$  et  $n > 0$ . Le contrôle est un vecteur de taille  $N_t + 1$  que l'on note  $v_\Delta$ . On cherche alors le vecteur  $v_\Delta$  dans l'espace des solutions

$$K_\Delta = \{ v(t) = v^n, \quad t \in [t^n, t^{n+1}[, \quad 0 \leq v^n \leq \bar{v}, \quad n = 0, N_t \}$$

qui est l'approximation de l'espace des fonctions  $K$ . La solution doit satisfaire le problème de minimisation suivant :

$$[P_7]_\Delta \begin{cases} J_\Delta(v_\Delta) = Min_{g_\Delta \in K_\Delta} J_\Delta(g_\Delta) \\ \text{où } u_\Delta^{l,n} \text{ est donnée par (12.7)-(12.8)-(12.9)} \end{cases}$$

Pour prouver l'existence de solutions à ce problème, on a besoin de montrer la continuité des densités  $u_\Delta^k$  pour  $k$  égal à  $e, l, f$  par rapport au contrôle  $v_\Delta$ . On pose alors  $\tilde{v}_\Delta$  et  $v_\Delta$  deux fonctions de  $K_\Delta$ . Mais aussi  $\tilde{u}_\Delta^k$  et  $u_\Delta^k$  les solutions correspondantes aux équations associées au stade  $k$  avec respectivement  $\tilde{v}_\Delta$  et  $v_\Delta$ .

**Lemme 18** *Il existe une constante  $C$  positive telle que*

$$\|\tilde{u}_\Delta^{k,n} - u_\Delta^{k,n}\|_{l^1} \leq C_k \|\tilde{v}_\Delta - v_\Delta\|_\infty, \quad n > 0, \quad k = e, l, f$$

où  $\|\cdot\|_{l^1}$  est la norme discrète de l'espace  $l^1([0, L])$  et  $\|\cdot\|_\infty$  est la norme discrète de l'espace  $l^\infty([0, T])$ .

**preuve :** On pose

$$\epsilon = \|\tilde{v}_\Delta - v_\Delta\|_\infty, \quad \beta_\infty = \sup_k \|\beta_\Delta^k\|_\infty, \quad k = e, l, f.$$

Sous la condition de CFL, la norme discrète  $l^1$  de la différence entre les densités  $\tilde{u}^k$  et  $u^k$  à l'instant  $n$  est donnée par

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_a} |\tilde{u}_i^{k,n+1} - u_i^{k,n+1}| &\leq \sum_{i=1}^{N_a} |\tilde{u}_i^{k,n} - u_i^{k,n}| + \frac{\Delta t}{\Delta a} |\tilde{u}_0^{k,n} - u_0^{k,n}| \\ &\quad + \Delta t \sum_{i=1}^{N_a} |\beta_i^k| |\tilde{u}_i^{k,n+1} - u_i^{k,n+1}|, \quad k = e, l, f. \end{aligned}$$

On note

$$\delta^{k,n} = \sum_{i=1}^{N_a} |\tilde{u}_i^{k,n} - u_i^{k,n}|, \quad k = e, l, f$$

tel que

$$\delta^{k,n+1} \leq \delta^{k,n} + \frac{\Delta t}{\Delta a} |\tilde{u}_0^{k,n} - u_0^{k,n}| + \Delta t \beta_\infty \delta^{k,n+1}, \quad k = e, l, f.$$

où  $\beta_\infty$  est la borne supérieures de tous les  $\beta_\infty^k$  pour  $k$  égal à  $e, l, f$ . L'expression des densités à la maille 0 varie en fonction de l'indice  $k$ . En remplaçant par les équations (12.8), on a

$$\delta^{e,n+1} \leq \delta^{e,n} + \Delta t \beta_\infty \delta^{f,n} + \epsilon + \Delta t \beta_\infty \delta^{e,n+1} \quad (12.10)$$

$$\delta^{l,n+1} \leq \delta^{l,n} + \Delta t \beta_\infty \delta^{e,n} + \Delta t \beta_\infty \delta^{l,n+1} \quad (12.11)$$

$$\delta^{f,n+1} \leq \delta^{f,n} + \Delta t \beta_\infty \delta^{l,n} \quad (12.12)$$

Au rang 0, on montre facilement la relation pour  $k = e$  car  $\tilde{u}_0^k$  est égal à  $u_0^k$  pour tous  $k$  égal à  $e, l, f$

$$\delta^{e,1} \leq c_e \epsilon, \quad c_e = \frac{1}{1 - \Delta t \beta_\infty}$$

On ne peut pas montrer cette relation pour les indices  $k = l, f$  car à l'instant initial le contrôle  $v_\Delta$  (et par conséquent  $\tilde{v}_\Delta$ ) n'intervient que sur la densité du stade oeuf. On obtient une relation pour  $k = l$  lorsque  $n$  est égal à 1

$$\delta^{l,2} \leq c_l \epsilon, \quad c_l = \frac{\Delta t \beta_\infty}{(1 - \Delta t \beta_\infty)^2}$$

et à l'instant  $n = 3$  pour le stade adulte  $k = f$

$$\delta^{f,3} \leq c_f \epsilon, \quad c_f = \left( \frac{\Delta t \beta_\infty}{1 - \Delta t \beta_\infty} \right)^2,$$

On suppose que ces relations sont vraies jusqu'au rang  $n$

$$\delta^{e,n} \leq c_1 \epsilon, \quad \delta^{l,n} \leq c_2 \epsilon, \quad \delta^{f,n} \leq c_3 \epsilon.$$

On les montre au rang  $n = n + 1$ . En remplaçant chaque terme de (12.10)-(12.11)-(12.12) par les inégalités du dessus, on montre la relation du lemme pour tous les  $n > 0$  et pour tous les stades  $k = e, l, f$ .  $\square$

On s'intéresse à présent avec le théorème suivant à l'existence de solutions pour le problème  $[P_7]_\Delta$

**Théorème 20** *Le problème  $[P_7]_\Delta$  admet au moins une solution.*

**Preuve :** Soit  $d$  la borne inférieure de la fonction coût  $J_\Delta(v_\Delta)$ . Cette borne est telle que

$$0 \leq d < +\infty,$$

par exemple  $J_\Delta(0) = \mu \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} u_i^{l,n} \right]^2 < +\infty$ . Soit  $\{v_\Delta^k\}$ , où  $k$  est un entier non nul, une suite minimisante appartenant à l'espace  $K_\Delta$  telle que

$$d + \frac{1}{k} \geq J_\Delta(v_\Delta^k) > d.$$

La valeur de la fonction coût au point  $v_\Delta^k$  est donnée par

$$J_\Delta(v_\Delta^k) = \eta \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} (v^n)^{k,2} + \mu \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} u_i^{l,n}(v_\Delta^k) \right]^2.$$

où  $u_i^{l,n}(v_\Delta^k)$  est la solution du schéma (12.7)-(12.8) pour  $v_\Delta$  égal à  $v_\Delta^k$  pour tous  $i$  allant de 1 à  $N_a$  et pour tous  $n$  allant de 0 à  $N_t$ . La suite  $\{v_\Delta^k\}_k$  est bornée. D'après le théorème de B.W, on peut en extraire une sous suite, notée  $\{v_\Delta^{k_n}\}_{k_n}$  qui converge vers  $v_\Delta^*$  dans l'espace  $K_\Delta$ . On déduit alors que

$$\begin{aligned} J_\Delta(v_\Delta^k) &= \eta \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} (v^n)^{k,2} + \mu \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} u_i^{l,n}(v_\Delta^k) \right]^2 \\ &= \eta \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} (v^n)^{k,2} + \mu \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} (u_i^{l,n}(v_\Delta^k) - u_i^{l,n}(v_\Delta^*)) \right]^2 + \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} u_i^{l,n}(v_\Delta^*) \right]^2 \end{aligned}$$

A l'aide du lemme 18 on a,

$$J_\Delta(v_\Delta^k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \eta \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} (v^n)^{*,2} + \mu \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{N_a} u_i^{l,n}(v_\Delta^*) \right]^2 = J_\Delta(v_\Delta^*) = d. \quad \square$$

La solution du problème  $[P_\Delta]_7$  est obtenue en résolvant le Lagrangien. Soient  $p_\Delta^k$  pour  $k = e, l, f$  les variables de Lagrange. Elles sont égales sur le volume de contrôle  $C_i \times [t^n \times t^{n+1}[$  à respectivement  $p_i^{e,n}$ ,  $p_i^{l,n}$ , et  $p_i^{f,n}$ , pour tous  $i$  allant de 1 à  $N_a$  et pour tous  $n$  allant de 0 à  $N_t$ . La fonction Lagrangienne est définie au point  $S$  c'est à dire  $(v_\Delta, u_\Delta^e, u_\Delta^l, u_\Delta^f, p_\Delta^e, p_\Delta^l, p_\Delta^f)$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Delta(S) = & \mathcal{J}_\Delta(v_\Delta) + \sum_{n=0}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_a} p_i^{e,n} \left( u_i^{e,n+1} - \frac{u_i^{e,n}(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e,n}}{1 + \Delta t \beta_i^e + \Delta t m_i^e} \right) \\ & + \sum_{n=0}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_a} p_i^{l,n} \left( u_i^{l,n+1} - \frac{u_i^{l,n}(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{l,n}}{1 + \Delta t \beta_i^l + \Delta t m_i^l} \right) \\ & + \sum_{n=0}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_a} p_i^{f,n} \left( u_i^{f,n+1} - \frac{u_i^{f,n}(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{f,n}}{1 + \Delta t m_i^f} \right) \end{aligned}$$

La dérivée du Lagrangien par rapport à la densité  $u_{i_0}^{e,n_0}$  donne à l'optimum  $S$  le système

$$p_{i_0}^{e,n_0-1} = p_{i_0}^{e,n_0} \frac{(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a})}{1 + \Delta t \beta_{i_0}^e + \Delta t m_{i_0}^e} + \frac{\Delta t}{\Delta a} \frac{p_{i_0+1}^{e,n_0}}{1 + \Delta t \beta_{i_0+1}^e + \Delta t m_{i_0+1}^e}, \quad i_0 = 1, N_a, \quad n_0 = N_t, 1$$

On suppose que le vecteur  $p_i^{e,N_t}$  à l'instant  $N_t$  est égal à  $f_i$ , pour tous allant de 1 à  $N_a$ . La fonction  $p_\Delta^e$  ne dépend pas du contrôle  $v_\Delta$  et on peut montrer que, sous la condition de CFL, ce vecteur est uniformément borné (voir preuve lemme 10).

La dérivée du Lagrangien par rapport au contrôle  $v^{n_0}$  est

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\Delta}{\partial v^{n_0}}(S) = 2\eta \Delta t v^{n_0} + \frac{p_1^{e,n_0}}{1 + \Delta t \beta_1^e + \Delta t m_1^e}, \quad n_0 = 0, N_t. \quad (12.13)$$

Son calcul nécessite de connaître la fonction duale associée au stade oeuf sur la maille  $C_1$  pour chaque instant  $n_0$ . Le calcul du gradient ne nécessite pas le calcul des autres dérivées. A l'optimum, le système (12.13) admet une unique solution.

### 12.2.1 Résultats numériques.

On résout le problème discret  $[P_7]$  avec la méthode de descente de Quasi-Newton (QN) décrite au chapitre 6. L'âge maximal est fixé à 10 et les pas de discrétisation à 0,1. Ces valeurs ont été choisies de telles sorte que les calculs soient rapides. On initialise la population d'Eudémis avec une cohorte de 100 femelles d'âge 1 jour. Les taux d'éclosion, d'émergence et de ponte sont égaux à des lois normales gaussiennes d'espérance 7.5, et d'écart type 0.35. Le nombre d'oeufs pondus en moyenne par une femelle est de 12 oeufs.

#### Estimation du contrôle $v$ sur 1 et 2 générations d'Eudémis.

Pour une génération d'Eudémis, la solution obtenue par l'algorithme de minimisation pour le problème  $[P_7]$  est dessinée en vert sur le graphe (b) de la figure 12.1.

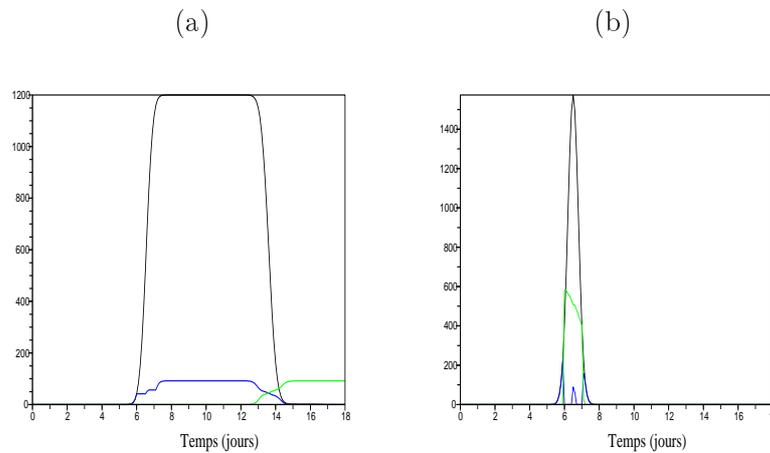


FIG. 12.1: (a) : Dynamiques temporelles des populations oeuf et larvaire (courbe verte). La courbe noire est la dynamique des oeufs obtenue sans contrôle des pontes alors que la courbe bleue est obtenue avec le contrôle  $v$  estimé par QN. (b) : Nombre d'oeufs pondus par 100 femelles, dont la fécondité est de 12 oeufs, et vivants en fonction du temps. La courbe noire est obtenue sans contrôle des pontes alors que la courbe bleue est obtenue avec le contrôle  $v$  estimé par QN. La courbe verte est le contrôle  $v$  estimé par QN.

Le nombre de larves restantes avec ce contrôle  $v$  des pontes est de 91 chenilles c'est à dire que la population larvaire a réduit de 87%. Pour obtenir cette baisse du nombre de larves, le produit est appliqué continuellement dans le temps pendant la ponte des femelles. Le positionnement dans le temps de ce contrôle débute juste après la naissance des premiers oeufs et se termine avant la naissance des derniers oeufs. La quantité de produit utilisée diminue au cours du temps.

La courbe verte du graphe (b) de la figure 12.2 est la solution du problème d'estimation  $[P_7]$  pour 2 générations d'Eudémis. La fécondité des femelles a été fixée à 6 oeufs pour cet exemple. La population larvaire des 2 générations a réduit de 84% avec ce contrôle des pontes. Pour cela, le produit est appliqué pendant la ponte des femelles pour chaque génération avec une quantité de produit utilisé plus importante en première génération qu'en deuxième.

Dans ces deux exemples, on a supposé que le produit utilisé au moment de la ponte des femelles est à 100 % efficace dès son application. On étudie numériquement dans le prochain paragraphe le contrôle des pontes à partir d'un produit qui perd en efficacité au cours du temps.

### Estimation du contrôle $v$ avec temps d'efficacité du produit.

On ajoute une hypothèse concernant la durée d'efficacité du contrôle au cours du temps. Les produits phytosanitaires sont actifs sur plusieurs semaines mais sous l'effet de perturbations climatiques comme la pluie, ou le vent, l'efficacité de ces produits diminue au cours du temps. On propose d'ajouter au problème  $[P_7]$  une équation modélisant le temps d'efficacité du produit

$$v'(t) = -rv(t) + w(t), \quad (12.14)$$

où  $r$  est le taux de dégradation du produit et  $w$  représente la quantité de produit à ajouter au cours du temps pour réduire la population larvaire. Le problème d'estimation consiste alors à déterminer la quantité de produit  $w$  en fonction du temps.

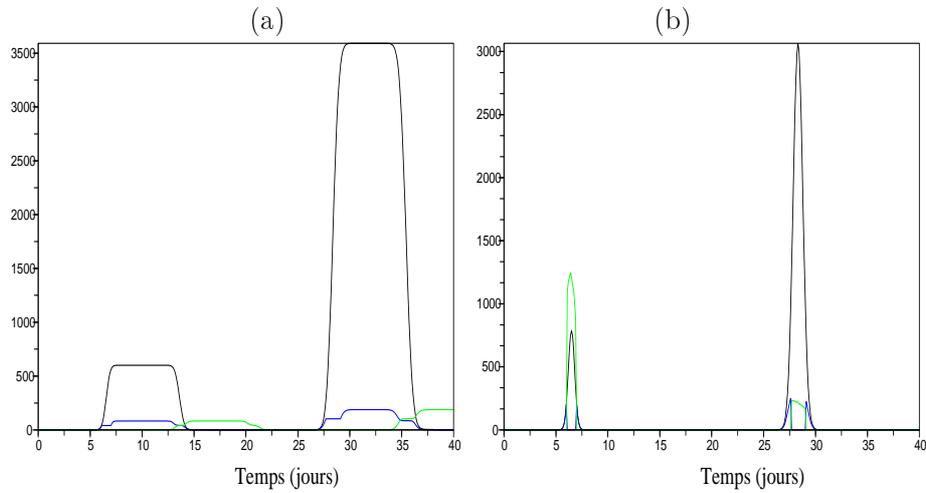


FIG. 12.2: (a) : Dynamiques temporelles des populations oeuf et larvaire (courbe verte). La courbe noire est la dynamique des oeufs obtenue sans contrôle des pontes alors que la courbe bleue est obtenue avec le contrôle  $v$  estimé par QN. (b) : Ponte de 100 femelles dont la fécondité est de 6 oeufs en fonction du temps. La courbe noire est obtenue sans contrôle des pontes alors que la courbe bleue est obtenue avec le contrôle  $v$  estimé par QN. La courbe verte est le contrôle  $v$  estimé par QN.

On fixe la constante  $r$  telle que le produit soit efficace pendant une génération d'Eudémis. La solution au problème d'optimisation est présentée en noir sur le graphe (b) de la figure 12.3. La courbe bleue de ce graphe correspond au contrôle  $v$  des pontes pour cette solution et calculé avec l'équation (12.14). En ajoutant continuellement du produit dès l'émergence des femelles et jusqu'à la naissance des premiers oeufs, la ponte des oeufs est totalement contrôlée.

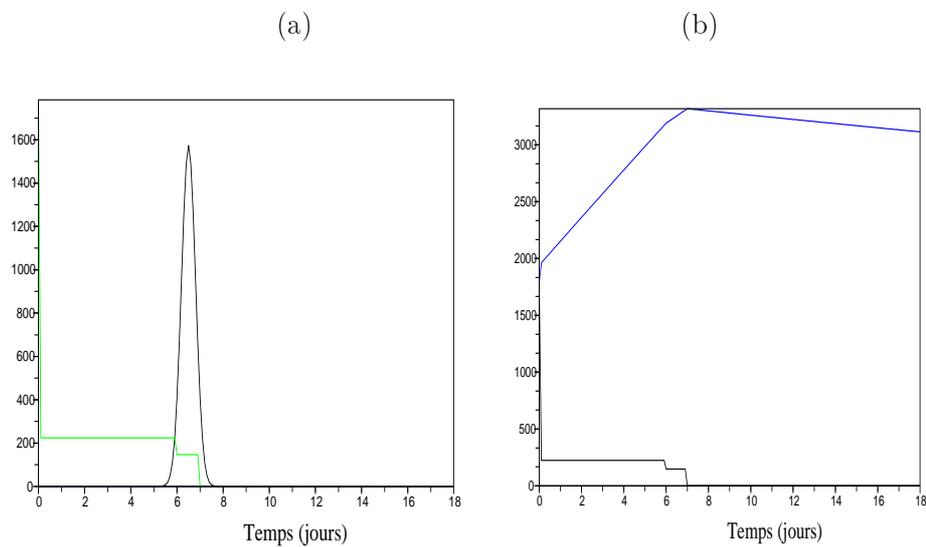


FIG. 12.3: (a) : Ponte de 100 femelles dont la fécondité est de 12 oeufs en fonction du temps. La courbe noire est obtenue sans contrôle des pontes. La courbe verte est le contrôle  $v$  estimé par QN. (b) : Contrôle des pontes estimé par QN en fonction du temps. La courbe noire est la quantité de produit utilisée alors que la courbe bleue est la durée d'action du contrôle  $v$ .



## Chapitre 13

# Contrôle des populations Eudémis à partir des oeufs.

On s'intéresse dans ce chapitre au contrôle des populations d'Eudémis à partir de produits phytosanitaires destinés à tuer directement les chenilles. Les larvicides et la toxine BT sont préconisés pour être appliqués au moment du stade "tête noire" du développement de l'oeuf. Le stade "tête noire" est modélisé dans la première équation du système (11.1). Le problème d'estimation du contrôle  $v$  sur les populations larvaires à partir de ces produits est donné par

$$[\mathbf{P}_8] = \begin{cases} \text{Min}_{v \in K} \left[ \eta \int_0^T v^2(t) dt + \mu \int_0^T \left( \int_0^{L^l} u^l(t, a) da \right)^2 dt \right], \\ \text{où la densité de larves } u^l \text{ est donnée par} \\ \begin{cases} \frac{\partial u^e}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^e}{\partial a}(t, a) = -\beta^e(a)u^e(t, a) - v(t)u^e(t, a) - m^e(a)u^e(t, a), & a \in [0, L^e] \\ \frac{\partial u^l}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^l}{\partial a}(t, a) = -\beta^l(a)u^l(t, a) - m^l(a)u^l(t, a), & a \in [0, L^l] \\ \frac{\partial u^f}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^f}{\partial a}(t, a) = -m^f(a)u^f(t, a), & a \in [0, L^f] \\ u^k(0, a) = u_0^k(a), & a \in ]0, L], \quad k = e, l, f \\ u^e(t, 0) = \int_0^{L^f} \beta^f(a)u^f(t, a) da, \\ u^l(t, 0) = \int_0^{L^e} \beta^e(a)u^e(t, a) da, \\ u^f(t, 0) = \int_0^{L^l} \beta^l(a)u^l(t, a) da, \end{cases} \end{cases}$$

Dans ce problème, le contrôle apparaît dans l'équation des oeufs. Le terme  $v(t)u^e(t, a)$  est le nombre d'oeufs d'âge  $a$  tués par le produit à l'instant  $t$ . L'efficacité du produit est la même quelque soit l'âge des oeufs.

Le domaine  $K$  est l'ensemble des solutions admissibles et est donné par

$$K = \{g(t) \in L^\infty([0, T]), 0 \leq g \leq \bar{g}\},$$

où  $T$  est choisit grand. On note la fonction coût  $\mathcal{J}(v)$ .

**Théorème 21** *Le problème  $[\mathbf{P}_8]$  admet au moins un optimum.*

**Preuve :** La démonstration de ce théorème est similaire à la preuve du théorème (18).



où  $t$  est dans l'intervalle  $[0, T]$ . Cette fonction dépend du contrôle  $v$  et des deux autres variables Lagrangiennes qui sont égales à

$$p_*^l(t, a) = \begin{cases} \int_t^T \left[ \beta^l(a) p_*^f(s, 0) - 2\mu \int_0^{L^l} u^l(s, x) dx \right] e^{-\int_t^s (\beta^l(\tau) + m^l(\tau)) d\tau} ds, & a > t, \\ \int_a^{L^l} \left[ \beta^l(s) p_*^f(t, 0) - 2\mu \int_0^{L^l} u^l(t, x) dx \right] e^{-\int_a^s (\beta^l(\tau) + m^l(\tau)) d\tau} ds, & a \leq t, \end{cases}$$

$$p_*^f(t, a) = \begin{cases} \int_t^T \beta^f(a) p_*^e(s, 0) e^{-\int_t^s m^f(\tau) d\tau} ds, & a > t, \\ \int_a^{L^f} \beta^f(s) p_*^e(t, 0) e^{-\int_a^s m^f(\tau) d\tau} ds, & a \leq t, \end{cases}$$

pour tous  $t$  dans l'intervalle  $[0, T]$ . La densité oeuf est obtenue en résolvant le problème d'évolution de  $[P_8]$  par la méthode des caractéristiques, soit

$$u^e(t, a) = \begin{cases} u_0^e(a - t) e^{-\int_{a-t}^a (\beta^e(s) + m^e(s) + v(s)) ds}, & t > a \\ u^e(t - a, 0) e^{-\int_0^a (\beta^e(s) + m^e(s) + v(s)) ds}, & a \leq t. \end{cases}$$

et  $t$  est donné dans  $[0, T]$ .

### 13.2 Étude numérique du problème de contrôle.

Dans ce paragraphe, on cherche une solution numérique au problème de contrôle  $[P_8]$ . A partir du maillage donné dans le chapitre précédent, on définit le problème discret associé à  $[P]_8$ . On approche les équations hyperboliques par un schéma VF

$$u_i^{e,n+1} = \frac{u_i^{e,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e,n}}{1 + \Delta t \beta_i^e + \Delta t m_i^e + \Delta t v^{n+1}}, \quad (13.2)$$

$$u_i^{l,n+1} = \frac{u_i^{l,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{l,n}}{1 + \Delta t \beta_i^l + \Delta t m_i^l}, \quad (13.3)$$

$$u_i^{f,n+1} = \frac{u_i^{f,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{f,n}}{1 + \Delta t m_i^f}, \quad (13.4)$$

pour  $i$  allant de 1 à  $Na$  et pour  $n$  allant de 0 à  $Nt - 1$ . Les conditions aux limites sont données par

$$\begin{aligned} u_0^{e,n} &= \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \beta_i^f u_i^{f,n}, \\ u_0^{l,n} &= \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \beta_i^e u_i^{e,n}, \\ u_0^{f,n} &= \Delta a \sum_{i=1}^{Na} \beta_i^l u_i^{l,n}, \end{aligned} \quad (13.5)$$

pour tous  $n$  allant de 0 à  $Nt$ . La donnée initiale est approchée pour chaque stade par

$$u_i^{k,0} = \frac{1}{\Delta a} \int_{C_i} u_0^k(a) da, \quad i = 1, Na, \quad k = e, l, f \quad (13.6)$$

La fonction coût s'écrit sur ce maillage

$$Min_{v_\Delta} \left[ J_\Delta(v_\Delta) = \eta \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} (v^n)^2 + \mu \Delta t \sum_{n=0}^{Nt} \left[ \Delta a \sum_{i=1}^{Na} u_i^{l,n} \right]^2 \right]$$

où  $u_i^{l,n}$  pour  $i = 1, N_a$  et  $n > 0$  est calculé par le schéma VF. On note  $u_\Delta^k$  la fonction égale à  $u_i^{l,n}$  lorsque  $a \in C_i$  et  $t \in [t^n, t^{n+1}[$  pour tous les âges  $i = 1, N_a$  et  $n > 0$ . Le contrôle est un vecteur de taille  $N_t + 1$  que l'on note  $v_\Delta$ . On cherche alors le vecteur  $v_\Delta$  dans l'espace des solutions

$$K_\Delta = \{v(t) = v^n, \quad t \in [t^n, t^{n+1}[, \quad 0 \leq v^n \leq \bar{v}, \quad n = 0, N_t\}$$

qui est l'approximation de l'espace des fonctions  $K$ . La solution doit satisfaire le problème de minimisation suivant :

$$[P_8]_\Delta \begin{cases} J_\Delta(v_\Delta) = \text{Min}_{g_\Delta \in K_\Delta} J_\Delta(g_\Delta) \\ \text{où } u^{l,n} \text{ est donnée par (13.3)-(13.5)-(13.6)} \end{cases}$$

A la différence du problème précédent  $[P_\Delta]_7$ , le contrôle apparaît dans les équations d'état du stade oeuf. Malgré cette divergence, le résultat suivant reste vrai

**Théorème 22** *Le problème  $[P_\Delta]_8$  admet au moins une solution .*

**Preuve :** La démonstration est développée dans la preuve du théorème 20 du chapitre précédent sur l'étude numérique du problème de contrôle optimal des populations Eudémis à partir de la ponte. Pour conclure on a besoin de montrer que la densité  $u_\Delta^l$  est continue par rapport au contrôle  $v_\Delta$ . Ce résultat est donné par le lemme suivant

**Lemme 19** *Il existe une constante  $C$  positive telle que*

$$\sup_k \|\tilde{u}_\Delta^{k,n} - u_\Delta^{k,n}\|_{l^1} \leq C \|\tilde{v}_\Delta - v_\Delta\|_\infty, \quad n > 0, \quad k = e, l, f$$

où  $\|\cdot\|_{l^1}$  est la norme discrète de l'espace  $l^1([0, L])$  et  $\|\cdot\|_\infty$  est la norme discrète de l'espace  $l^\infty([0, T])$ .

Les fonctions  $\tilde{u}_\Delta^k$  et  $u_\Delta^k$  sont les solutions aux équations d'état correspondantes au stade  $k$  avec respectivement  $\tilde{v}_\Delta$  et  $v_\Delta$  choisies dans  $K_\Delta$ .

**Preuve du lemme :** Soit  $\epsilon = \|v_\Delta - \tilde{v}_\Delta\|_\infty$  et soit  $N_t$  arbitrairement fixé. On considère les équations schéma (13.3) sous la forme

$$u_i^{e,n+1} = u_i^{e,n} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e,n} - \Delta t \beta_i^e u_i^{e,n+1} - \Delta t m_i^e u_i^{e,n+1} - \Delta t v^{n+1} u_i^{e,n+1},$$

pour le stade oeuf mais aussi larve et femelle. On fait la différence en valeur absolue de  $\tilde{u}_i^{e,n+1}$  et  $u_i^{e,n+1}$  puis on somme sur les mailles  $i = 1, N_a$ . En admettant que la CFL est satisfaite ( $\frac{\Delta t}{\Delta a} \in [0, 1]$ ) et en notant  $\xi_i^{e,n} = \tilde{u}_i^{e,n} - u_i^{e,n}$  on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_a} |\xi_i^{e,n+1}| &\leq \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}\right) \sum_{i=1}^{N_a} |\xi_i^{e,n}| + \frac{\Delta t}{\Delta a} \sum_{i=1}^{N_a} |\xi_{i-1}^{e,n}| \\ &\quad + \Delta t (\beta_\infty^e + m_\infty^e + \|\tilde{v}_\Delta\|_\infty) \sum_{i=1}^{N_a} |\xi_i^{e,n+1}| + \Delta t M N_a \epsilon \end{aligned}$$

où

$$\beta_\infty^e = \sup_{1 \leq i \leq N_a} |\beta_i^e|, \quad m_\infty^e = \sup_{1 \leq i \leq N_a} |m_i^e|,$$

et  $M$  la borne supérieure uniforme de la densité oeuf sur toutes les mailles  $i$  et les instants  $n$ . On additionne les deux premiers termes à droite de l'inégalité pour avoir

$$\|\xi^{e,n+1}\|_1 \leq \|\xi^{e,n}\|_1 + \frac{\Delta t}{\Delta a} |\xi_0^{e,n}| + \Delta t (\beta_\infty^e + m_\infty^e + \|\tilde{v}_\Delta\|_\infty) \|\xi^{e,n+1}\|_1 + \Delta t M N_a \epsilon$$

Par définition,

$$|\xi_0^{e,n}| \leq \Delta a \beta_\infty^e \|\xi^{f,n}\|_1$$

où  $\beta_\infty^f = \sup_{1 \leq i \leq N_a} |\beta_i^f|$ . On s'affranchit de l'indice  $k = e, l, f$  en posant  $\xi^n = \max_k \xi^{k,n}$ , mais aussi

$$\beta_\infty = \max_k \beta_\infty^k, \quad m_\infty = \max_k m_\infty^k,$$

on a alors

$$\|\xi^{n+1}\|_1 \leq \|\xi^n\|_1 + \Delta t \beta_\infty \|\xi^n\|_1 + \Delta t (\beta_\infty + m_\infty + \|\tilde{v}_\Delta\|_\infty) \|\xi^{n+1}\|_1 + M L \epsilon$$

soit

$$\|\xi^{n+1}\|_1 \leq \frac{\|\xi^n\|_1 (1 + \Delta t \beta_\infty) + M L \epsilon}{(1 - \Delta t (\beta_\infty + m_\infty + \|\tilde{v}_\Delta\|_\infty))}$$

Par récurrence, et en précisant que  $\xi^0 = 0$ , on obtient le résultat voulu.  $\square$

La solution de ce problème  $[P_8]_\Delta$  est obtenue en résolvant le Lagrangien. Soient  $p_\Delta^k$  pour  $k = e, l, f$  les variables de Lagrange. Elles sont égales sur le volume de contrôle  $C_i \times [t^n \times t^{n+1}[$  à respectivement  $p_i^{e,n}$ ,  $p_i^{l,n}$ , et  $p_i^{f,n}$ , pour tous  $i = 1, N_a$  et  $n = 1, N_t + 1$ . La fonction Lagrangienne est définie au point  $S$  c'est à dire  $(v_\Delta, u_\Delta^e, u_\Delta^l, u_\Delta^f, p_\Delta^e, p_\Delta^l, p_\Delta^f)$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Delta(S) = & \mathcal{J}_\Delta(v_\Delta) + \sum_{n=0}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_a} p_i^{e,n} \left( u_i^{e,n+1} - \frac{u_i^{e,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e,n}}{1 + \Delta t \beta_i^e + \Delta t m_i^e + \Delta t v^{n+1}} \right) \\ & + \sum_{n=0}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_a} p_i^{l,n} \left( u_i^{l,n+1} - \frac{u_i^{l,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{l,n}}{1 + \Delta t \beta_i^l + \Delta t m_i^l} \right) \\ & + \sum_{n=0}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_a} p_i^{f,n} \left( u_i^{f,n+1} - \frac{u_i^{f,n} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{f,n}}{1 + \Delta t m_i^f} \right) \end{aligned}$$

La dérivée du Lagrangien par rapport à la densité  $u_{i_0}^{e,n_0}$  donne à l'optimum  $S$  le système

$$p_{i_0}^{e,n_0-1} = \frac{p_{i_0}^{e,n_0} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a})}{1 + \Delta t \beta_{i_0}^e + \Delta t m_{i_0}^e + \Delta t v^{n_0+1}} + \frac{\Delta t}{\Delta a} \frac{p_{i_0+1}^{e,n_0}}{1 + \Delta t \beta_{i_0+1}^e + \Delta t m_{i_0+1}^e + \Delta t v^{n_0+1}} \quad (13.7)$$

pour  $i_0$  allant de 1 à  $N_a$  et pour tous  $n_0$  allant de  $N_t$  à 1. On l'initialise avec  $p_i^{e,N_t+1} = f_i$ , pour  $i = 1, N_a$ . La matrice  $\{p_i^{e,n}\}$  pour  $i = 1, N_a$  et  $n > 0$  intervient dans le calcul du contrôle  $v^n$  via une méthode de descente. Celle-ci converge vers l'optimum à condition que la variable Lagrangienne associée au stade vérifie la propriété suivante

**Lemme 20** *Il existe une constante positive  $\lambda$  tel que*

$$\sup_{1 \leq i \leq N_a} |p_i^{e,n+1} - \tilde{p}_i^{e,n+1}| \leq \lambda \|v_\Delta - \tilde{v}_\Delta\|_\infty, \quad n \geq 0$$

où  $v_\Delta$  et  $\tilde{v}_\Delta$  sont dans  $K_\Delta$ .

**Preuve :** On applique la preuve faite pour le lemme (7) du chapitre 5 avec  $\beta_\Delta = v_\Delta$ .

La dérivée par rapport au contrôle  $v^{n_0}$  est

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^{n_0}}(S) = 2\eta \Delta t v^{n_0} + \Delta t \sum_{i=1}^{N_a} p_i^{e, n_0-1} \frac{u_i^{e, n_0-1} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e, n_0-1}}{(1 + \Delta t \beta_{i_0}^e + \Delta t m_{i_0}^e + \Delta t v^{n_0})^2},$$

pour  $n_0 = 0, N_t$ . A l'optimum  $S$ , le contrôle est donné par

$$2\eta \Delta t v^{n_0} - \Delta t \sum_{i=1}^{N_a} p_i^{e, n_0-1} \frac{u_i^{e, n_0-1} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e, n_0-1}}{(1 + \Delta t \beta_{i_0}^e + \Delta t m_{i_0}^e + \Delta t v^{n_0})^2},$$

où  $p_i^{e, n}$  pour  $i = 1, N_a$  et  $n = 1, N_t$  est calculé par la formule (13.7) alors que  $u_i^{e, n}$  est égale à

$$u_i^{e, n} = \frac{u_i^{e, n-1} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}) + \frac{\Delta t}{\Delta a} u_{i-1}^{e, n-1}}{1 + \Delta t \beta_i^e + \Delta t m_i^e + \Delta t v^n}$$

pour  $i = 1, N_a$  et  $n = 0, N_t$ . Ces expressions dépendent toutes les deux du contrôle  $v^n$ ,  $n > 0$ .

### 13.3 Résultats numériques.

On programme le calcul de la solution du problème  $[P_8]$  selon la méthode décrite dans la partie 6.

L'âge maximal est fixé à 10 et les pas de discrétisation à 0.1. On initialise la population d'Eudémis avec une cohorte de 100 femelles. Le taux d'éclosion, celui d'émergence et de ponte sont égaux à des lois normales gaussiennes d'espérance 7.5, et d'écart type 0.35. Le nombre d'oeufs pondus en moyenne par une femelle est de 12 oeufs.

#### Estimation du contrôle sur 1 génération d'Eudémis.

Pour une génération d'Eudémis, la solution obtenue par l'algorithme de minimisation pour le problème  $[P_8]$  est dessinée sur le graphe (b) de la figure 13.1.

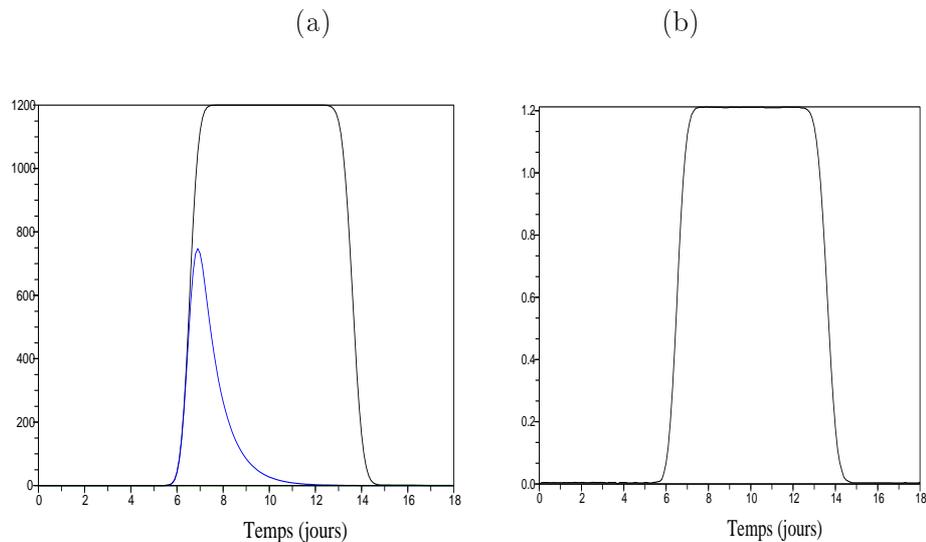


FIG. 13.1: (a) : Dynamiques temporelles de la population oeuf. La courbe noire est la dynamique des oeufs obtenue sans contrôle des oeufs alors que la courbe bleue est obtenue avec le contrôle  $v$  estimé par QN. (b) : Contrôle  $v$  des oeufs estimé par QN en fonction du temps.

Le nombre de larves diminue au cours du temps avec ce contrôle des oeufs jusqu'à atteindre la valeur nulle. Le produit est appliqué continuellement pendant toute la période du développement de la population oeuf, c'est à dire dès la naissance des premiers oeufs et jusqu'à l'éclosion des derniers oeufs. La quantité de produit utilisée pour ce contrôle des oeufs est constante sur cette période.

#### Estimation du contrôle $v$ en modélisant le temps d'efficacité du produit.

On ajoute une hypothèse concernant la durée d'efficacité du contrôle au cours du temps. Les produits phytosanitaires sont actifs sur plusieurs semaines mais sous l'effet de perturbations climatiques comme la pluie, ou le vent, l'efficacité de ces produits diminue au cours du temps. On propose d'ajouter au problème  $[P_7]$  une équation modélisant le temps d'efficacité du produit

$$v'(t) = -rv(t) + w(t), \quad (13.8)$$

où  $r$  est le taux de décroissance d'efficacité du produit et  $w$  représente la quantité de produit à ajouter au cours du temps pour réduire la population larvaire. Le problème de contrôle consiste alors à déterminer la quantité de produit  $w$  en fonction du temps.

On fixe la constante  $r$  telle que le produit soit efficace pendant une génération d'Eudémis. La solution au problème d'optimisation est présentée en noir sur le graphe (b) de la figure 13.2. La courbe bleue de ce graphe correspond au contrôle  $v$  des oeufs pour cette solution et calculé avec l'équation (13.8).

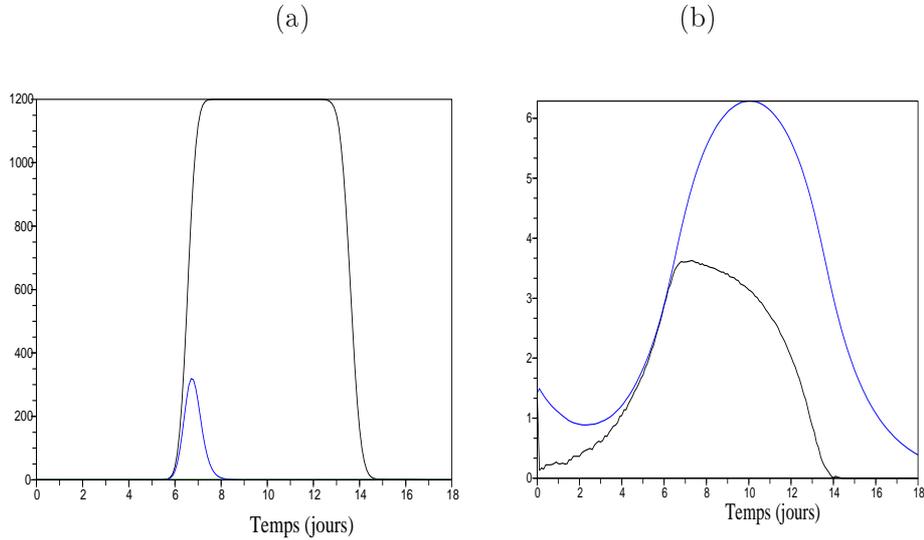


FIG. 13.2: (a) : Dynamiques temporelles de la population oeuf. La courbe noire est la dynamique des oeufs obtenue sans contrôle des oeufs alors que la courbe bleue est obtenue avec le contrôle  $v$  estimé par QN. (b) : Contrôle  $v$  des oeufs estimé par QN en fonction du temps. La courbe noire est la quantité de produit utilisée alors que la courbe bleue est la durée d'action du contrôle  $v$ .

En ajoutant continuellement une quantité de produit dès l'émergence des femelles et jusqu'à l'éclosion des derniers oeufs, le nombre d'oeufs vivants diminue au cours du temps avec ce contrôle  $v$  jusqu'à atteindre la valeur nulle. La quantité de produit utilisée augmente progressivement jusqu'à la naissance des premiers oeufs puis décroît.

## Chapitre 14

# Contrôle des populations Eudémis à partir des accouplements.

Dans ce dernier paragraphe, on s'intéresse au contrôle des populations Eudémis avec la confusion sexuelle. Cette méthode a pour but de baisser le taux de fécondité des femelles en perturbant l'accouplement de celles-ci avec les mâles. Par conséquent, les femelles non accouplées ne produisent pas d'oeufs et la population totale en oeufs diminue. Le nombre d'oeufs pondus à chaque instant par les femelles est modélisé par la troisième équation du système (11.2). Ce nombre d'oeufs est modifié lorsque les papillons sont sous confusion sexuelle et est égal à

$$u^e(t, 0) = \int_0^{L^f} (\beta^f(a) - v(t))u^f(t, a)da, \quad t > 0$$

Ainsi le nombre total d'oeufs pondus par l'ensemble des femelles à l'instant  $t$  est retranché par une quantité qui est proportionnelle à la taille de la population femelle. Cette quantité varie en fonction du temps.

### 14.1 Formulation et résolution du problème de contrôle.

Le problème d'estimation du contrôle  $v$  des populations larvaires à partir de la confusion sexuelle est

$$[\mathbf{P}_9] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{v \in K} \left[ \eta \int_0^T v^2(t)dt + \mu \int_0^T \left( \int_0^{L^l} u^l(t, a)da \right)^2 dt \right], \\ \text{où } u^l \text{ est solution du système} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^e}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^e}{\partial a}(t, a) = -\beta^e(a)u^e(t, a) - m^e(a)u^e(t, a), \quad a \in [0, L^e], \\ \frac{\partial u^l}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^l}{\partial a}(t, a) = -\beta^l(a)u^l(t, a) - m^l(a)u^l(t, a), \quad a \in [0, L^l], \\ \frac{\partial u^f}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u^f}{\partial a}(t, a) = -m^f(a)u^f(t, a), \quad a \in [0, L^f], \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} u^e(t, 0) = \int_0^{L^f} (\beta^f(a) - v(t))u^f(t, a)da, \\ u^l(t, 0) = \int_0^{L^e} \beta^e(a)u^e(t, a)da, \\ u^f(t, 0) = \int_0^{L^l} \beta^l(a)u^l(t, a)da, \end{array} \right. \\ \\ u^k(0, a) = u_0^k(a), \quad a \in [0, L^k], \quad k = e, l, f, \end{array} \right. \quad (14.1)$$

où  $\eta$  et  $\mu$  sont des constantes inférieures ou égales à 1. Le domaine  $K$  est l'ensemble des solutions admissibles et est donné par

$$K = \{g(t) \in L^\infty([0, T]), 0 \leq g \leq \bar{g}\}.$$

On note la fonction coût  $\mathcal{J}(v)$ . D'un point de vue mathématique, ce problème est très proche de  $[P_7]$  donné au premier paragraphe. Les propriétés mathématiques sont les même, à savoir

**Théorème 23** *Le problème  $[P_9]$  admet au moins un optimum.*

**Preuve :** La preuve de ce théorème est identique à la preuve du théorème (18).

On résout le problème d'optimisation  $[P_9]$  en étudiant la fonction Lagrangienne. On formule cette fonction en ajoutant les équations aux dérivées partielles et les conditions aux limites de (14.1) dans la fonction coût via l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange. Soient  $p$  et  $h$  les variables de Lagrange. Le premier vecteur  $p$  est égal à  $(p^e, p^l, p^f)$  et le second vecteur est égal à  $(h^e, h^l, h^f)$ . On note  $S$  le vecteur  $(v, p, h)$ , le Lagrangien s'écrit en ce point

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S) = & \mathcal{J}(v) + \int_0^T \int_0^{L^e} [\partial_t u^e + \partial_a u^e + \beta^e(a)u^e + m^e(a)u^e] p^e(t, a) da dt \\ & + \int_0^T \int_0^{L^l} [\partial_t u^l + \partial_a u^l + \beta^l(a)u^l + m^l(a)u^l] p^l(t, a) da dt \\ & + \int_0^T \int_0^{L^f} [\partial_t u^f + \partial_a u^f + m^f(a)u^f] p^f(t, a) da dt \\ & + \int_0^T \left[ u^e(t, 0) - \int_0^{L^f} (\beta^f(s) - v(t))u^f(t, s) ds \right] h^e(t) dt \\ & + \int_0^T \left[ u^l(t, 0) - \int_0^{L^e} \beta^e(s)u^e(t, s) ds \right] h^l(t) dt \\ & + \int_0^T \left[ u^f(t, 0) - \int_0^{L^l} \beta^l(s)u^l(t, s) ds \right] h^f(t) dt \end{aligned}$$

Le vecteur  $S^*$  est un optimum de  $\mathcal{L}$  si et seulement si le gradient de la fonction Lagrangienne est nul à l'optimum.

La dérivée du Lagrangien par rapport aux variables  $p$  à l'optimum  $S^*$  donne le problème d'évolution (14.1). La dérivée du Lagrangien par rapport aux variables  $h$  donnent les conditions de renouvellement de chaque densité  $u^k$ , pour  $k$  égal à  $e, l, f$ . Le problème adjoint s'obtient en dérivant le Lagrangien au point  $S^*$  par rapport aux densités  $u^e, u^l$  et  $u^f$  et s'écrit

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial t} p^e(t, a) - \frac{\partial}{\partial a} p^e(t, a) + \beta^e(a)p^e(t, a) + m^e(a)p^e(t, a) = p^l(t, 0)\beta^e(a) & a \in [0, L^e], \\ -\partial_t p^l(t, a) - \partial_a p^l(t, a) + \beta^l(a)p^l(t, a) + m^l(a)p^l(t, a) = \beta^l(a)p^f(t, 0) \\ \quad - 2\mu \int_0^L u^l(t, a) da & a \in [0, L^l], \\ -\partial_t p^f - \partial_a p^f + m^f(a)p^f(t, a) = (\beta^f(a) - v(t))p^e(t, 0) & a \in [0, L^f], \\ p^e(T, a) = 0 & a \in [0, L^e], \\ p^l(T, a) = 0 & a \in [0, L^l], \\ p^f(T, a) = 0 & a \in [0, L^f], \\ p^e(t, L^e) = p^l(t, L^l) = p^f(t, L^f) = 0. \end{cases} \quad (14.2)$$

Chaque équation admet une solution explicite. A cause du terme placé à droite de l'égalité dans les trois équations, ces solutions sont dépendantes les unes des autres.

**Théorème 24** *Sous les hypothèses (H 13)- (H 14)- (H 15), et  $\int_0^{L^l} u^l(t, a) da \geq 0$ , le système (14.2) admet une unique solution  $(p^e, p^l, p^f)$  où chaque fonction  $p^k$  est dans l'espace  $L^2([0, T] \times [0, L^k])$  pour  $k$  égal à  $e, l, f$ .*

**Preuve :** On applique la démonstration faite pour le théorème (19).

L'optimum de la fonction coût est donnée par la relation

$$2\eta v_*(t) = -p_*^e(t, 0) \int_0^{L^f} u_*^f(t, a) da$$

où  $p_*^e(t, 0)$  dépend des fonctions  $p_*^l(t, 0)$  et  $p_*^f(t, 0)$ . Ces fonctions sont obtenues en résolvant le système (12.5) par la méthode des caractéristiques et sont données par

$$\begin{aligned} p_*^e(t, a) &= \begin{cases} \int_t^T \beta^e(a) p_*^l(s, 0) e^{-\int_t^s (\beta^e(\tau) + m^e(\tau)) d\tau} ds, & a > t, \\ \int_a^{L^e} \beta^e(s) p_*^l(t, 0) e^{-\int_a^s (\beta^e(\tau) + m^e(\tau)) d\tau} ds, & a \leq t, \end{cases} \\ p_*^l(t, a) &= \begin{cases} \int_t^T \left[ \beta^l(a) p_*^f(s, 0) - 2\mu \int_0^{L^l} u^l(s, x) dx \right] e^{-\int_t^s (\beta^l(\tau) + m^l(\tau)) d\tau} ds, & a > t, \\ \int_a^{L^l} \left[ \beta^l(s) p_*^f(t, 0) - 2\mu \int_0^{L^l} u^l(t, x) dx \right] e^{-\int_a^s (\beta^l(\tau) + m^l(\tau)) d\tau} ds, & a \leq t, \end{cases} \\ p_*^f(t, a) &= \begin{cases} \int_t^T (\beta^f(a) - v(s)) p_*^e(s, 0) e^{-\int_t^s m^f(\tau) d\tau} ds, & a > t, \\ \int_a^{L^f} (\beta^f(s) - v(t)) p_*^e(t, 0) e^{-\int_a^s m^f(\tau) d\tau} ds, & a \leq t, \end{cases} \end{aligned}$$

pour tous  $t$  dans l'intervalle  $[0, T]$ . Ces fonctions ne dépendent pas du contrôle  $v$ . La densité femelles est obtenue en résolvant le problème d'évolution de  $[P_9]$  par la méthode des caractéristiques, soit

$$u_*^f(t, a) = \begin{cases} u_0^f(a - t) e^{-\int_{a-t}^a m^f(s) ds}, & t > a \\ u_*^f(t - a, 0) e^{-\int_0^a m^f(s) ds}, & a \leq t. \end{cases}$$

et  $t$  est donné dans  $[0, T]$ .

## 14.2 Résultats numériques.

On résout ce problème numériquement en utilisant une méthode de descente, en particulier celle de Quasi-Newton. La méthode est décrite dans le chapitre 6 de cette thèse.

L'âge maximal est fixé à 10 et les pas de discrétisation à 0,1. On initialise la population d'Eudémis avec une cohorte de 100 femelles d'âge 1 jour. Le taux d'éclosion et de ponte sont égaux à des lois normales gaussiennes d'espérance 3,5, et d'écart type 0,35. Alors que le taux d'émergence est égal à une loi normale de même écart type mais d'espérance 7,5. Le nombre d'oeufs pondus en moyenne par une femelle est de 12 oeufs.

### Estimation du contrôle $v$ sur 1 génération d'Eudémis.

Pour une génération d'Eudémis, la solution obtenue par l'algorithme de minimisation pour le problème  $[P_9]$  est dessinée en vert sur le graphe (b) de la figure 14.1. Ce contrôle des accouplements  $v$  est optimal car les femelles ont pondus aucun oeuf. Le produit est appliqué continuellement dans le temps pendant la ponte des femelles.

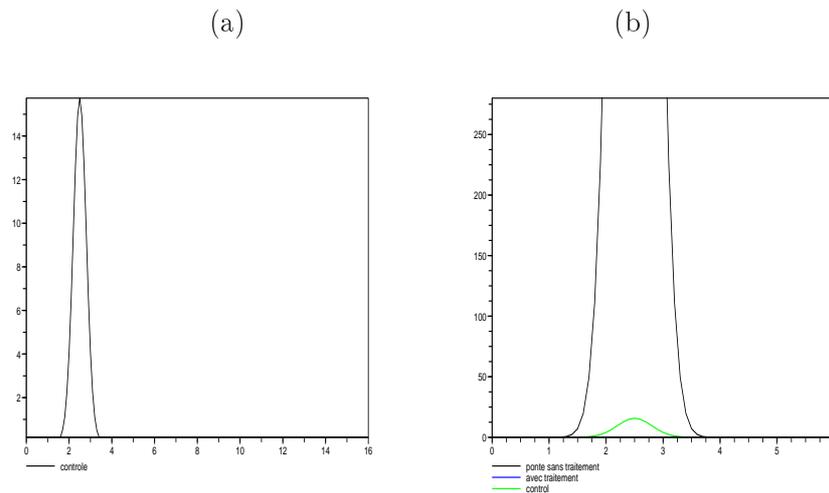


FIG. 14.1: (a) : Contrôle  $v$  des accouplements estimé par QN en fonction du temps. (b) : Nombre d'oeufs pondus par 100 femelles, dont la fécondité est de 12 oeufs, et vivants en fonction du temps. La courbe noire est obtenue sans contrôle des accouplements. La courbe verte est le contrôle  $v$  estimé par QN. Le nombre d'oeufs vivants est nul avec ce contrôle.

### Estimation du contrôle $v$ en modélisant le temps d'efficacité du produit.

On ajoute une hypothèse concernant la durée d'efficacité du contrôle au cours du temps. Les produits phytosanitaires sont actifs sur plusieurs semaines mais sous l'effet de perturbations climatiques comme la pluie, ou le vent, l'efficacité de ces produits diminue au cours du temps. On propose d'ajouter au problème  $[P_7]$  une équation modélisant le temps d'efficacité du produit

$$v'(t) = -rv(t) + w(t), \quad (14.3)$$

où  $r$  est le taux de décroissance d'efficacité du produit et  $w$  représente la quantité de produit à ajouter au cours du temps pour réduire la population larvaire. Le problème de contrôle consiste alors à déterminer la quantité de produit  $w$  en fonction du temps.

On fixe la constante  $r$  telle que le produit soit efficace pendant une génération d'Eudémis. La solution au problème d'optimisation est présentée en noir sur le graphe (b) de la figure 14.2. La courbe bleue de ce graphe correspond au contrôle  $v$  des accouplements pour cette solution et calculé avec l'équation (14.3).

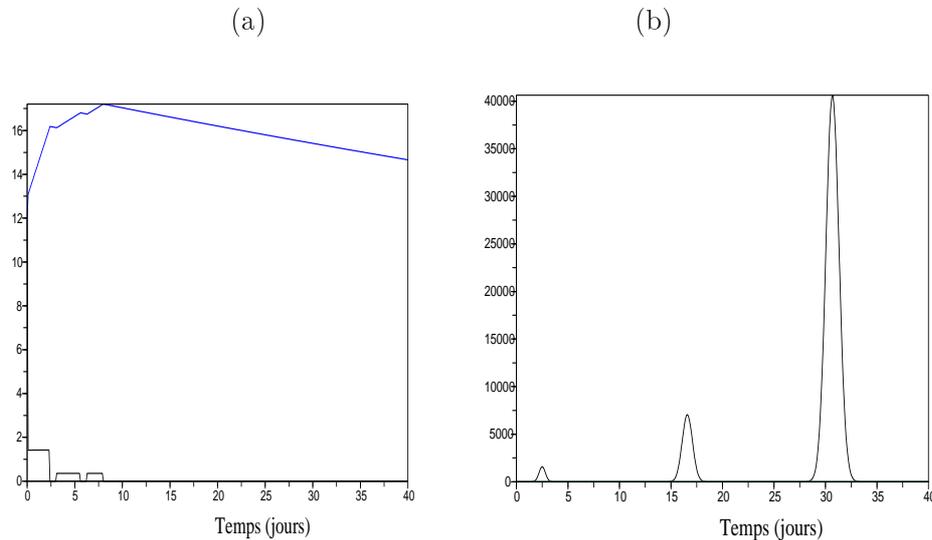


FIG. 14.2: (a) : Contrôle  $v$  des accouplements estimé par QN en fonction du temps. La courbe noire est la quantité de produit utilisée alors que la courbe bleue est la durée d'action du contrôle  $v$ . (b) : Nombre d'oeufs pondus par 100 femelles, dont la fécondité est de 6 oeufs, et vivants en fonction du temps. La courbe noire est obtenue sans contrôle des accouplements. La courbe verte est le contrôle  $v$  estimé par QN. Le nombre d'oeufs vivants est nul avec ce contrôle.

Ce contrôle est obtenu en ajoutant du produit dès l'émergence des femelles et jusqu'à la fin du développement de la première génération d'Eudémis. Avec cette application du produit, les femelles ne pondent pas d'oeufs pendant 3 générations de l'insecte.



## Chapitre 15

# Conclusions et Perspectives

## 15.1 Conclusions.

Nous avons développé un modèle mathématique pour l'étude et la compréhension de la dynamique de la population d'un ravageur de la vigne, l'Eudémis (*L. botrana*). C'est un système d'équations aux dérivées partielles qui décrit les variations numériques au cours du temps de la population en fonction de quatre stades de développement qui sont l'oeuf, la larve, la chrysalide et le papillon et du sexe des individus. Ces équations qui s'apparentent au modèle de Von Forster-McKendrick (1959) sont généralement utilisées pour décrire la population d'insectes en fonction de l'âge des individus. La structuration en stade de développement est modélisée habituellement par les biologistes avec des équations différentielles, négligeant ainsi la structuration en âge nécessaire pour modéliser la croissance de l'insecte, en particulier dans les stades juvéniles. Par exemple, le modèle ACTA (Baumgartner et al., 1988) modélise un processus moyen de croissance identique à tous les individus d'une population Eudémis avec des équations différentielles de type TDD (Manetsch, 1976).

A partir de cette structuration de la population en âges et en stades, le modèle prend en compte les différentes vitesses de développement observées dans une cohorte d'oeufs ou de chenilles (chapitre 1) mais aussi les différents comportements de ponte (chapitre 11). L'ajout de caractéristiques éthologiques ou biologiques de cohortes d'Eudémis nous a permis d'étudier les conséquences des variations climatiques et environnementales sur les générations suivantes. En particulier, on a montré qu'en fonction du comportement de ponte, la taille de la population pouvait fluctuer dans le temps et la durée de la dynamique de vol des générations suivantes pouvait s'allonger de quelques jours ou rester inchangée.

Notre modèle fonctionne en boucle fermée, c'est à dire que la solution obtenue pour un stade de développement dépend de la solution des autres équations du système. Ce modèle peut alors simuler plusieurs générations d'Eudémis au cours d'une même année mais aussi sur plusieurs années consécutives contrairement aux modèles EVA et ACTA. A partir d'une théorie basée sur les points fixes, on a montré l'existence unique d'une solution globale pour ce modèle qui peut être approchée numériquement par une méthode d'approximation de type Volumes finis.

Comme les précédents modèles Eudémis, la température est un des facteurs biologiques impliqué dans le calcul de la vitesse de développement de l'insecte. La vitesse de développement n'est pas corrélée à la somme thermique quotidienne comme le modèle EVA, c'est à dire à la moyenne des températures maximale et minimale, mais est exprimée en fonction de la température moyenne journalière comme les modèles ACTA et Brière. Ainsi, le modèle prédit pour une somme thermique donnée un nombre d'insectes variable avec la température effective de la journée (cf. chapitre 10). La vitesse de développement dépend aussi dans ce modèle de l'alimentation de la chenille, précisément de la nature du cépage. Ce facteur négligé dans les précédents modèles Eudémis permet d'obtenir une dynamique de cette population propre à une région viticole. Par exemple, pour des conditions climatiques identiques, le modèle prédit une dynamique d'émergence d'une population d'Eudémis alimentée en riesling, cépage cultivé en Alsace ou en Allemagne, en retard par rapport à une population d'insectes nourris en merlot qui est un cépage utilisé dans la production de vin Bordelais. Un exemple de ces simulations est présenté sur la figure (15.1) où les dynamiques d'émergence sont calculées pour une population alimentée en pinot noir d'une part et d'une alimentée en chardonnay d'autre part.

Le deuxième point fort de notre travail est l'estimation des paramètres du modèle à partir des données expérimentales. La méthode utilisée est celle décrite dans le livre d'Anita [6] ou encore dans l'article de Rundell (1993) et consiste à minimiser une fonction de moindres carrés. Tous les paramètres du modèle ont été déterminés pour des conditions climatiques et environnementales spécifiques. Ces paramètres sont des fonctions exprimées par rapport à l'âge des individus et

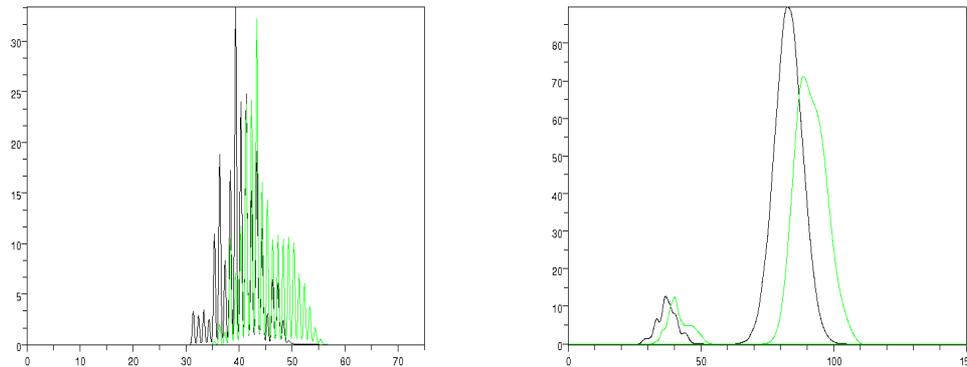


FIG. 15.1: Exemples de simulations du modèle *Lobesia botrana*. Gauche : Dynamiques de vol d'une cohorte *Eudémis* soumise aux mêmes conditions climatiques mais une alimentation différente : pinot noir pour la courbe noire et chardonnay pour la courbe verte. Droite : prédiction supplémentaire des dynamiques de vol de la deuxième génération.

sont utilisés dans le modèle pour décrire la dynamique d'éclosion, la dynamique d'émergence, la dynamique de ponte ou la mortalité dans chacune des sous populations (oeuf, larvaire, papillon). L'originalité de ce travail est que les fonctions ont pu être estimées à partir de données expérimentales mesurant un nombre d'individus par unité de temps. Par exemple, les données obtenues en condition de laboratoire sur la dynamique d'éclosion ont permis de déterminer les paramètres de l'équation décrivant la dynamique des oeufs en absence de mortalité. Ces mêmes données complétées des mesures faites sur la dynamique d'émergence ont servi à déterminer les paramètres de l'équation associée aux stades larvaire et chrysalide. Enfin, la fonction de natalité a quant à elle été identifiée à partir des mesures faites sur la dynamique de ponte. Généralement, les mesures expérimentales utilisées pour l'estimation des paramètres d'un modèle mathématique, comme par exemple celui de Von Forster-McKendrick, sont des distributions en âge de la population à un instant donné. L'obtention de ces dernières est difficile sur certaines populations comme par exemple sur les oeufs ou sur les papillons. Des données expérimentales mesurant un nombre d'individus par unité de temps sont beaucoup plus faciles à obtenir techniquement et sont donc moins entachées d'erreurs. Seule la distribution en âge de la population larvaire peut être facilement mesurée et on a montré que cette donnée était insuffisante pour estimer tous les paramètres du modèle mais suffisante pour caractériser les fonctions de l'équation associée au stade larvaire. Cependant, on a aussi montré que les taux de mortalité des populations d'oeufs, larvaires et papillons sont facilement déterminés avec les données mesurant l'âge de ces populations à un instant précis.

Finalement, le modèle déterministe développé dans cette thèse a l'avantage d'être aussi généraliste car les paramètres biologiques considérés (la température, la ressource alimentaire, la variabilité inter cohorte) sont mesurables expérimentalement et communs à d'autres insectes polyvoltins. Ce modèle décrit le développement d'une cohorte ou de plusieurs cohortes d'*Eudémis* observé en conditions de laboratoire permettant ainsi de mieux comprendre l'évolution dans le temps de cette population en conditions naturelles. La figure (15.2) présente des simulations du modèle qui ont été établies avec des données de captures aux pièges sexuels obtenues sur le château Yquem en 2004. Les premières captures sont utilisées pour ajuster le modèle, les captures suivantes sont prédites et comparées aux simulations. La courbe verte simule la dynamique d'émergence des

mâles de la deuxième génération alors que la courbe bleue est associée à la troisième génération d'Eudémis. Sur le graphe de gauche, les simulations sont obtenues en absence de mortalité et en imposant une fécondité de 10 oeufs en moyenne pour les femelles de la première génération et de 20 oeufs pour les femelles de la seconde génération. Les fécondités sont faibles pour permettre la superposition des courbes sur un même graphique et augmentent au cours de la saison (chapitre 1). Le modèle prédit le début de la dynamique de vol de la troisième génération beaucoup plus tôt que celle mesurée avec les pièges sexuels. En supposant que les pièges placés dans les parcelles de vignes sont fiables, on tente d'expliquer l'origine de cette absence d'Eudémis pendant le mois d'août. Le graphe de droite présente les simulations de la dynamique d'émergence des mâles sur 3 générations en modélisant une mortalité sur les oeufs de la troisième génération c'est à dire à partir de la mi-juin à la mi-juillet. Avec cette nouvelle hypothèse, le modèle prédit une durée des dynamiques d'émergence similaire aux données de captures, l'amplitude des courbes pouvant être rectifiée en augmentant le taux de mortalité.

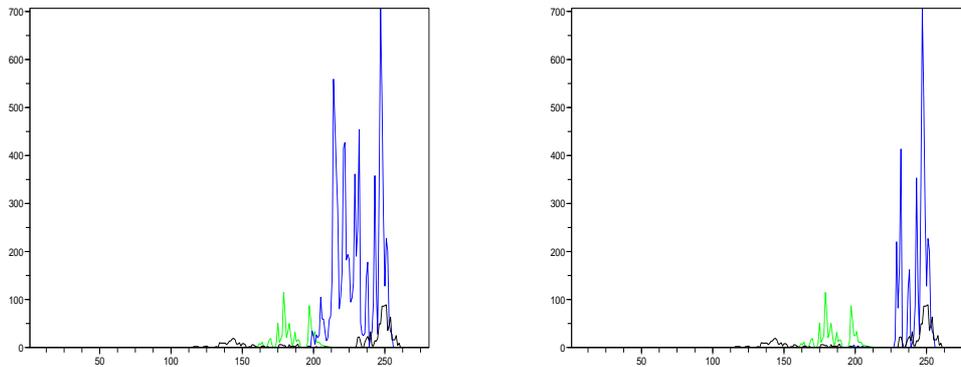


FIG. 15.2: Simulations du modèle *Lobesia botrana* de la dynamique d'émergence des mâles. La courbe noire correspond aux données de captures aux pièges sexuels obtenues en 2004 au château Yquem (données non publiées de D. Thiéry). Les courbes verte et bleue sont respectivement les dynamiques de vol de la deuxième et troisième génération prédites par le modèle. Gauche : en absence de mortalité. Droite : avec une forte mortalité sur les oeufs de la troisième génération de mi-juin à mi-juillet.

## 15.2 Perspectives.

L'étude de la dynamique de la population d'Eudémis est réalisée dans le seul but de pouvoir contrôler cette population. La lutte contre cette population est menée depuis une dizaine d'années en France de manière raisonnée aux moyens d'insecticides ou de produits dérivant de la biotechnologie. La lutte raisonnée consiste à optimiser le nombre de traitements pendant la saison viticole mais aussi la qualité et la quantité de produits utilisés. Dans la partie 4 de cette thèse, la question du contrôle de cette population de ravageurs aux moyens d'insecticides, ou de la confusion sexuelle a été abordée. Cependant des hypothèses liées aux problèmes financiers (coût des produits, coût du matériel), ou encore aux problèmes techniques (date de traitement, matériel utilisé) sont à ajouter pour rendre le modèle mathématique plus réaliste. Des mesures expérimentales sur l'efficacité des produits comme celles obtenues par Charmillot et al. (2006) sur certains larvicides et ovicides sont indispensables dans cette modélisation. Mais d'autres me-

sures sont à réaliser pour obtenir une relation entre la quantité de produits utilisés et le nombre d'insectes tués en fonction de conditions environnementales variables.

Une modélisation spatiale en fonction des caractéristiques de la parcelle comme par exemple l'exposition, la taille, ou l'âge mais aussi des caractéristiques liées au sol (humidité, composition) permettrait d'identifier, à l'échelle de la parcelle ou de la région, des zones envahies d'Eudémis. La compacité de la grappe, l'exposition des grappes à la lumière (Zahavi et al., 2003) influencent le comportement de ponte de la femelle. On peut donc penser que des parcelles peu exposées au vent et composées de ceps vigoureux a peut être plus de chance d'être colonisées que des parcelles ventées avec un sol appauvri. La localisation précise des populations de ce ravageur faciliterait la gestion de celle-ci et réduirait l'utilisation de produits chimiques. La thèse de Tran (2004) qui modélise la dynamique d'une population d'insectes à partir de données environnementales extraites d'images de télédétection présente des outils et des méthodes intéressantes pour cette modélisation spatiale. Des équations aux dérivées partielles comme celles utilisées dans cette thèse sont adaptées en ajoutant une structuration spatiale. Des données mesurant la densité d'Eudémis au cours du temps sur plusieurs parcelles d'une région viticole sont nécessaires dans l'ajustement de ce modèle mathématique. Ces données peuvent correspondre aux nombres de captures aux pièges sexuelles et/ou alimentaires. Le déplacement des papillons en fonction des caractéristiques de la parcelle peut aussi être modélisé, mais cette fois ci on s'orientera vers des équations aux dérivées partielles de type parabolique par exemple (thèse de Brière, 1998).

A partir de la modélisation mathématique, des stratégies de lutte contre l'Eudémis peuvent être élaborées en tenant compte de la dynamique de la population du ravageur, des conditions environnementales et des différentes méthodes de lutte disponibles. En sorti du modèle, des dynamiques de l'insecte seront calculées en fonction du traitement optimal et sans traitement afin d'en évaluer son efficacité. Une interface graphique, comme celle proposée par ACTA, peut être imaginée dans laquelle le viticulteur définit ses propres méthodes de luttés, ses moyens techniques et ses conditions météorologiques.

Le modèle développé dans cette thèse peut être un outil d'aide à la recherche pour de nouvelles méthodes de lutte comme par exemple la lutte biologique (N.Maher, 2002). La lutte biologique consiste à réduire le nombre d'Eudémis en introduisant un ennemi naturel de celui-ci comme par exemple des trichogrammes. Cette méthode a été très peu étudiée jusqu'à maintenant sur Eudémis, mais pourtant des études révèlent une efficacité de cette méthode avec des taux de parasitisme de 20 à 80 % sur les oeufs d'Eudémis (Remund, 1990 ; Barnay, 1999), ou de 20 à 53% sur les larves (Xuéreb et al., 2006). Le modèle mathématique développé au chapitre 13 peut être appliqué pour un contrôle des oeufs ou des larves à partir de parasitoïdes. Cependant le contrôle doit dépendre du nombre de prédateurs présents à chaque instant. Des équations aux dérivées partielles comme celles du modèle *Lobesia botrana* sont adaptées pour décrire la dynamique de la population du parasitoïde. Les données liées aux traits de vie sont à exploiter pour estimer les paramètres de ce modèle.

De nombreux problèmes inverses restent encore non résolus. A commencer par l'estimation de la fonction de passage entre le stade chrysalide et le stade papillon du modèle pluriannuel. Cette fonction permet de décrire la dynamique d'émergence des papillons sortant de la diapause. Les données de captures aux pièges sexuels ou alimentaires obtenues sur deux années consécutives sont nécessaires pour déterminer ce paramètre. Le problème d'estimation a une formulation équivalente au problème étudié au chapitre 7, précisément au deuxième sous problème où la condition aux limites du stade larvaire correspond aux dernières captures avant la diapause et les captures du printemps sont modélisées par la condition aux limites du stade papillon.

Les paramètres du modèle mathématique ont été estimés en fonction de l'âge des individus et pour des conditions climatiques spécifiques constantes au cours du temps. Une expression ma-

thématique continue en âge et en température de chaque paramètre est envisageable à condition d'avoir des mesures sur la dynamique d'éclosion, d'émergence et de ponte de cohortes Eudémis sous d'autres conditions expérimentales. Par exemple, nos mesures sur la durée de développement au stade larvaire présentées au chapitre 10 permettent d'estimer la fonction décrivant la dynamique d'émergence pour des conditions thermiques fluctuantes. Des expériences similaires avec des écarts thermiques plus faibles et des températures plus chaudes la nuit que le jour permettraient de couvrir un ensemble de conditions thermiques. L'intérêt de cette modélisation est de pouvoir simuler la dynamique temporelle d'émergence dans des conditions thermiques variables. Pour certains problèmes d'estimation traités dans cette thèse, la question de l'unicité n'a pas été élucidée. Ces problèmes se ramènent à l'étude des conditions de régularité de la solution satisfaisant l'équation de Fredholm non linéaire. Ceux sont des problèmes rencontrés dans d'autres domaines des mathématiques appliquées et qui restent sans solutions aujourd'hui.

# Bibliographie

- [1] B.M. Adams, H.T. Banks, J.E. Banks, J.D. Stark, Population dynamics models in plant-insect herbivore-pesticide interactions. *Mathematical Biosciences*, 196 : 39-64, (2005).
- [2] B. Ainseba, S. Anita, M. Langlais, Optimal control for a nonlinear age-structured population dynamics model. *Electronic Journal of Differential Equations*, 28 : 1-9 (2002).
- [3] O. Angulo, J.C. Lopez-Marcos, Numerical integration of nonlinear size-structured population equations. *Ecological Modelling*, 133 : 3-14 (2000).
- [4] O. Angulo, J.C. Lopez-Marcos, Numerical integration of fully nonlinear size-structured population models. *Applied Numerical Mathematics*, 50 : 291-327 (2004).
- [5] O. Angulo, J.C. Lopez-Marcos, F.A. Milner, The application of an age-structured model with unbounded mortality to demography. *Mathematical Biosciences*, 208 : 495-520 (2007).
- [6] S. Anita, Analysis and control of age-dependent population dynamics. Mathematical Modelling : theory and Applications. *Kluwer Academic Publishers*.
- [7] O. Auroy, Estimation des traits d'histoire de vie de l'Eudémis de la vigne (*Lobesia botrana* D. & Schiff.) en vue d'une utilisation dans un modèle mathématique. Mémoire de fin d'études, ENITA, (2006).
- [8] C. Awmack, S.R. Leather, Host plant quality and fecundity in herbivorous insects. *Annual Review of Entomology*. 47 : 817-844 (2002).
- [9] H.T. Banks, J.E. Banks, L.K. Dick, J.D. Stark, Estimation of dynamic rate parameters in insect populations undergoing sublethal exposure to pesticides. *Bulletin of Mathematical Biology*, 69 : 2139-2180 (2007).
- [10] O. Barnay, Dynamique des populations et relation hôte-parasitoïde chez le couple *Lobesia botrana* Den & Schiff.-*Trichogramma cacaeciae* MArchal, dans le cadre de la lutte biologique en vignoble. Doctorat Université Pierre et Marie Curie, Paris (1999).
- [11] J. Baumgartner, P. Baronio, Modello fenologico di volo di *Lobesia botrana* Den. et Schiff. (Lep. Tortricidae) relativo alla situazione ambientale dell'Emilia-Romagna. *Boll. Ist. Ent. G. Grandi*, Univ. Bologna, 43 : 157-170 (1988).
- [12] W. Behrens, K.H. Hoffmann, S. Kempa, S. Gäbler, G. Merkel-Wallner, Effets of diurnal thermoperiods and quickly oscillating temperatures on the development and reproduction of crickets, *Gryllu bimaculatus*. *Oecologia* 59 : 279-287 (1983).
- [13] S.P. Blythe, R.M. Nisbet, W.S.C. Gurney, The dynamics of Population Models with Distributed Maturation Periods. *Theoretical population biology*, 25 : 289-311 (1984).
- [14] O. Bonato, F. Schulthess, J. Baumgärtner, Simulation model for maize crop growth based on acquisition and allocation processes for carbohydrate and nitrogen, *Ecological Modelling*, 124 : 11-28 (1999).
- [15] H. Brezis, Analyse fonctionnelle : Théorie et applications. Editions Masson (1983).

- [16] J.F. Brière, Analyse mathématique et numérique d'un modèle spatio-temporel de la dynamique d'un ravageur de la vigne : *Lobesia botrana* (Eudémis). Thèse en Mathématiques et Informatique, Université Bordeaux 1 (1998).
- [17] G. Caselli, J. Vallin, G. Wunsch, Démographie : analyse et synthèse. Volume I. "La dynamique des populations", édition de l'INED, Paris, p.35-59 (2004).
- [18] A. Calsina, J. Saldana, A model of physiologically structured population dynamics with a nonlinear individual growth rate. *Journal of Mathematical Biology*, 33 : 335-364 (1995).
- [19] A. Campbell, B.D. Frazer, N. Gilbert, A.P. Gutierrez, M. Mackauer, Temperature requirements of some aphids and their parasites. *Journal of Applied Ecology*. 11 : 431-438 (1974).
- [20] P.J. Charmillot, D. Pasquier, C. Salamin, F. Briand, Efficacité larvicide et ovicide sur les vers de la grappe *Lobesia botrana* et *Eupoecilia ambiguella* de différents insecticides appliqués par trempage des grappes. *Revue suisse Viticulture Horticulture*, 38 (5) : 289-295 (2006).
- [21] F. Chavent, Etude de la dynamique des populations d'Eudémis de la vigne (*Lobesia botrana* Den. et Schiff.). Adaptation d'un modèle d'évolution aux conditions climatiques de Provence. Mémoire de fin d'étude E.N.S.S.A.A. Dijon (1983).
- [22] C. Cho, Y. Kwon, Parameter estimation in nonlinear age-dependent population dynamics. *IMA journal of applied mathematics* 62 : 227-244 (1999).
- [23] Y.H. Choi, D.A. Bohan, S.J. Powers, C.W. Wiltshire, D.M. Glen, M.A. Semenov, Modelling *Deroceras reticulatum* population dynamics based on daily temperature and rainfall. *Agriculture, Ecosystems & Environment* 103 : 519-525 (2004).
- [24] Y.H. Choi, D.A. Bohan, R.P.J. Potting, M.A. Semenov, D.M. Glen, Individual based model of slug population and spatial dynamics. *Ecological Modelling*, 190 : 336-350 (2006).
- [25] J. Clairambault, B. Laroche, S. Mischler, B. Perthame, A mathematical model of the cell cycle and its control. Rapport de recherche n°4892 (2007).
- [26] M. Darrieu, Contribution à l'étude de deux modèles "Tordeuses", *Lobesia botrana* Den et Schiff. et *Laspeyresia pomonella* L., pour les avertissements agricoles en aquitaine. Thèse Ecole Nationale d'Ingénieurs des Travaux Agricoles de Bordeaux (1982).
- [27] J.E. Dennis Jr., R.B. Schnabel, Numerical Methods for unconstrained optimization and Nonlinear Equations, Prentice-Hall Series in Computational Mathematics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1983).
- [28] B. Dennis, W.P. Kemp, R.C. Beckwith, Stochastic Model of Insect Phenology : Estimation and Testing. *Environmental entomology*, 15 : 540-554 (1986).
- [29] G. Di Cola, G. Gilioli, Mathematical models for age-structured population dynamics : An overview. *Population and Community Ecology for Insect Management and Conservation*, Baumgärtner et al. (eds), 45-61 (1998).
- [30] J. Douglas, F.A. Milner, Numerical methods for a model of population dynamics. *Calcolo*, 24 : 247-254 (1987).
- [31] L. El Bahi, Contribution à la modélisation de la dormance de deux lépidoptères : *Lobesia botrana* Den et Schiff. et *Sesamia nonagrioides* Lef. pour les avertissements agricoles en Aquitaine. Mémoire de fin d'étude, Ecole nationale supérieure d'horticulture de Versailles (1990).
- [32] D. Esmenjaud, S. Kreiter, M. Martinez, R. Sforza, D. Thiéry, M. Van Helden, M. Yvon, Ravageurs de la vigne. Éditions Féret, Bordeaux (2008).
- [33] D.J. Fielding, L.S. Defoliart, Growth, Development, and nutritional physiology of Grasshoppers from subarctic and temperate regions. *Physiological and biochemical zoology*, 80 : 607-618 (2007).

- [34] M. Fermaud, Cultivar susceptibility of grape berry clusters to larvae of *Lobesia botrana* (Lepidoptera : Tortricidae). *Journal of economic entomology*, 91 : 974-980 (1998).
- [35] P.W. Flinn, D.W. Hagstrum, C. Reed, T.W. Phillips, Simulation model of *Rhyzopertha dominica* population dynamics in concrete grain bins. *Journal of Stored products research*, 40 : 39-45 (2004).
- [36] L. Friedrich, A. Schmidt-Tiedemann, K.J. Schirra, Control of *Sparganothis pilleriana* Schiff. and *Lobesia botrana* Den. et Schiff. in German vineyards using sex pheromone-mediated mating disruption. Use of pheromones and other semiochemicals in integrated production, *IOBC wprs Bull* 25 (2002).
- [37] B. Gabel, R. Roehrich, Action d'expositions à différentes températures sur les chrysalides diapausantes de *Lobesia botrana* Den et Schiff. Régulation des cycles saisonniers chez les invertébrés, Les colloques de l'INRA n°52 (1990).
- [38] B. Gabel, R. Roehrich, Sensitivity of grapevine phenological stages to larvae of European grapevine moth, *Lobesia botrana* Den. et Schiff. (Lep., Tortricidae). *Journal of applied entomology*, 119 :127-130 (1995).
- [39] M. G. Garroni, M. Langlais, Age-Dependent Population Diffusion with External Constraint. *Journal of Mathematical Biology*, 14 : 77-94 (1982).
- [40] B. Götz, Beiträge zur analyse des Mottenfluges bei den traubenwicklern *Clysia ambiguella* und *Polychrosis botrana*. *Weinu. Rebe*, 23 : 201-228 (1941).
- [41] M.E. Gurtin, A system of Equations for Age-dependent Population Diffusion. *Journal of theoretical Biology*, 40 : 389-392 (1973).
- [42] R.M. Gurtin, R.C. MacCamy, Non-linear age-dependent population dynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 3 :281-300 (1974).
- [43] M.E. Gurtin, L.F. Murphy, On the optimal harvesting of Persistent Age-structured Populations. *Journal of Mathematical Biology*, 13 : 131-148 (1981).
- [44] M.E. Gurtin, S.J. Smith, Optimal harvesting of an age-structured Population. *Journal of Mathematical Biology*, 29 : 77-90 (1990).
- [45] M. Gyllenberg, A. Osipov, L. Päiväranta, The inverse problem of linear age-structured population dynamics. *Journal of Evolution Equations*, 2 : 223-239 (2002).
- [46] K. Hadeler, R. Waldstätter, A. Wörz-Busekros, Models for pair formation in bisexual populations. *Journal of Mathematical Biology*, 26 : 635 (1988).
- [47] T.G. Hallam, R.R. Lassiter, J. Li, W. McKinney, An approach for Modeling Populations with Continuous Structured Models. *Individual Based Models* article 15.
- [48] E.E. Holmes, M.A. Lewis, J.E. Banks, R.R. Veit, partial differential equations in ecology : spatial interactions and population dynamics. *Ecology*, 75 : 17-29 (1994).
- [49] F. Hoppensteadt, Mathematical theories of Populations : Demographics, Genetics and epidemics. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia, 20 (1975).
- [50] B. Hurtrel, D. Thiéry, Modulation of flight activity in *Lobesia botrana* Den & Schiff. (Lepidoptera : Tortricidae) females studied in wind tunnel. *Journal of Insect Behavior*, 12 : 199-211 (1999).
- [51] D.G. Kendall, Stochastic processes and population growth. *Journal of the Royal Statistical Society*, 11 : 230-264 (1949).
- [52] T. Kostova, An explicit Third-Order Numerical Method for Size-structured population equations. *Methods for Partial Differential Equations*, 19 : 1-21 (2003)
- [53] Y. Kwon, C. Cho, Second-order accurate difference methods for a one-sex model of population dynamics. *SIAM journal on numerical analysis*, 30 : 1385-1399 (1993).

- [54] L. Lebart, A. Morineau, M. Piron, Statistique exploratoire multidimensionnelle, 2ème édition. Dunod (1997).
- [55] R.L. Lindroth, K.A. Klein, J.D.C. Hemming, A.M. Feuker, Variation in temperature and dietary nitrogen affect performance of the gypsy moth (*Lymantria dispar* L.), *Physiological Entomology*, 22 : 55-64 (1997).
- [56] J.A. Logan, D.J. Wollkind, S.C. Hoyt, L.K. Tanigoshi, An analytic model for description of temperature Dependent Rate Phenomena in Arthropods. *Environmental Entomology*, 5 : 1133-1140 (1976).
- [57] J.A. Logan, R.E. Stinner, R.L. rabb, J.S. Bacheler, A Descriptive Model for Predicting Spring Emergence of *Heliothis zea* Populations in North Carolina. *Environmental Entomology*, 8 : 141-146 (1979).
- [58] J.A. Logan, Toward an Expert System for Development of Pest Simulation Models. *Entomological Society of America*, 17 : 359-376 (1988).
- [59] M. Lo Schiavo, Population Kinetic Models for Social Dynamics : Dependence on structural Parameters. *Computers and Mathematics with Applications*, 44 : 1129-1146 (2002).
- [60] A.G. MacKendrick, Applications of mathematics to medical problems. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 44 : 98-130 (1926).
- [61] N. Maher, Sélection du site de ponte chez *Lobesia botrana* (Lepidoptera : Tortricidae) : influence de l'information chimique non-volatile présente sur les fruits des plantes hôtes. Doctorat Université Bordeaux 2. Université Bordeaux 2, Oenologie-Ampélogie (2002).
- [62] T.R. Malthus, An essay on the principle of population, Londres (1798).
- [63] T.J. Manetsch, Time-varying delays and their use in aggregative models of large systems. *IEEE Trans. Systems MAn Cybernet.*, SMC-6 : 547-553 (1976).
- [64] J.W. Matteson, G.C. Decker, Development of the European corn borer at controlled constant and variable temperatures. *Journal of Economic Entomology*, 58 : 344-349 (1965).
- [65] J. Moreau, X. Arruego, B. Benrey, D. Thiéry, Differences in nutritional quality of parts of *Vitis vinifera* berries affect fitness of the European grapevine moth. *Entomologia experimentalis et applicata*, 119 : 93-99 (2006).
- [66] J. Moreau, B. Benrey, D. Thiéry, Grape variety affects larval performance and also female reproductive performance of the European grapevine moth *Lobesia botrana* (Lepidoptera : Tortricidae). *Bulletin of Entomological Research*, 96 : 205-212 (2006).
- [67] K. Nakamura, Effect of photoperiod on the size-temperature relationship in a pentatomid bug, *Dolycoris baccarum*, *Journal of Thermal Biology*, 27 : 541-546 (2002).
- [68] L. Oustry, Influence des facteurs abiotiques et trophiques sur le développement de l'Eudémis de la vigne (*Lobesia botrana* Den. & Schiff.) application à la modélisation. mémoire de fin d'étude ENITA Bordeaux (1991).
- [69] Pianka E.R., r and K selection or b and d selection?. *American Naturalist*, 104 : 592-597 (1972).
- [70] M. Pilant, W. Rundell, Determining the initial age distribution for an age structured population. *Mathematical Population Studies*, 3 : 3-20 (1991).
- [71] M. Pilant, W. Rundell, Determining a coefficient in a first-order hyperbolic equation. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 51 : 494-506 (1991).
- [72] R.E. Plant, L.T. Wilson, Models for age structured populations with distributed maturation rates, *Journal of Mathematical Biology*, 23 :247-262 (1986).
- [73] U. Remund, Essais avec les parasitoïdes des vers de la grappe. *IOBC/ wprs Bulletin*, 13 : 66-67 (1990).

- [74] N. Roditakis, M.G. Karandinos, Effects of photoperiod and temperature on pupal diapause induction of grape berry moth *Lobesia botrana*. *Physiological Entomology*, 26 : 329-340 (2001).
- [75] R. Roehrich, La diapause de l'Eudémis de la vigne *Lobesia botrana* Schiff. (Lepidoptera, Tortricidae) : Induction et élimination. *Annales de Zoologie et d'Ecologie Animales*, 1 : 75-81 (1969).
- [76] R. Roehrich, J.P. Carles, J. Stockel, Essai de prévision de la pose des pièges sexuels pour le premier vol de *Lobesia botrana* et extension pour les premières éclosions. *Plant protection problems and prospects of integrated control in viticulture* 724-729 (1989)
- [77] R. Roehrich, E. Boller, Tortricids in vineyards, in *Van der Geest, L.P.S. & Evenhuis, H.H. (Ed.), Tortricid pests, their biology natural enemies and control*. Elsevier, Amsterdam, pp. 507-514 (1991).
- [78] W. Rundell, Determining the birth function for an age structured Population. *Mathematical Population Studies*, 1 : 377-395 (1989).
- [79] W. Rundell, Determining the death rate for an age-structured population from census data. *SIAM journal on applied mathematics*, 53 : 1731-1746 (1993).
- [80] G. Sentenac, D. Thiéry, Current biological and biotechnical tools to control grapevine pests and vectors. In. *Mondiaviti*. Bordeaux - France (2008).
- [81] A. Satake, T. Ohgushi, S. Urano, K. Uchimura, Modeling population dynamics of a pest with temperature-dependent development : predicting emergence timing and potential damage, *Ecological Research*, 21 :107-116 (2006).
- [82] M. Savopoulou-Soultani, D.G. Stavridis, M.E. Tzanakakis, Development and Reproduction of *Lobesia botrana* on Vine and Olive Inflorescences. *Entomologia Hellenica*, 8 : 29-35 (1990).
- [83] M. Savopoulou-Soultani, P.G. Milonas, D.G. Stavridis, Role of availability of food to the adult *Lobesia botrana* (Lepidoptera : Tortricidae) in Its Reproductive Performance. *Journal of economic entomology*, 98 : 1341-1348 (1998).
- [84] G.B. Schaalje, H.R. Van der Vaart, Relationships among recent models for insect population dynamics with variable rates of development, *Journal of Mathematical Biology*, 27 :399-428 (1989).
- [85] R.M. Schoolfield, P.J.H. Sharpe, C.E. Magnusson, Non-linear regression of biological temperature-dependent rate models based on absolute action-rate theory. *Journal of theoretical Biology*, 88 : 719-731 (1981).
- [86] M. Severini, J. Baumgärtner, L. Limonta, Parameter estimation for distributed delay based population models from laboratory data : egg hatching of *Oulema duftschmidi* Redthenbacher as an example, *Ecological Modelling*, 167 : 233-246 (2003).
- [87] P.J.H. Sharpe, D.W. Demichelle, Reaction kinetics of poikilotherm development. *Journal of theoretical Biology*, 64 : 649-670 (1977).
- [88] J.W. Sinko, W. Streifer, A new model for age-size structure of a population, *Ecology*, 48 : 910-918 (1967).
- [89] V. Schmitz, Contribution à l'étude du mécanisme de la confusion sexuelle des mâles chez l'insecte. Application à la mise au point du procédé biotechnique de lutte contre l'Eudémis de la vigne *Lobesia botrana* Den et Schiff. Thèse ENSA Rennes (1992).
- [90] D. Söndgerath, W. Müller-Pietralla, A model for the development of the cabbage root fly (*Delia radicum* L.) based on the extended Leslie model. *Ecological Modelling*, 91 : 67-76 (1996).

- [91] J. Stockel, P. Lecharpentier, R. Roehrich, A. Fos, P. Pracros, La phéromone sexuelle de synhèse : un outil indispensable pour gérer la lutte contre l'Eudémi de la vigne, *J. Inter. des Sciences de la Vigne et du Vin*, No hors série 153-157.
- [92] D. Sulsky, Numerical solution of structured population models. II Mass structure. *Journal of Mathematical Biology*, 32 : 491-514 (1994).
- [93] D. Thiéry, J. Moreau, Relative performance of European grapevine moth (*Lobesia botrana*) on grapes and other hosts. *Oecologia* 143 : 548-557 (2005).
- [94] D. Thiéry, J. Moreau, Grape cultivar affects larval and female fitness of the European grapevine moth, *Lobesia botrana* (Lepidoptera : tortricidae). *Integrated protection in Viti*, 131-138 (2006)
- [95] D. Thiéry, Vers de la grappe : les connaitre pour s'en protéger. *Editions Vigne et Vin Publications Internationals : Bordeaux, France* (2005).
- [96] D. Thiéry, D. Esmenjaud, S. Kreiter, M. Martinez, R. Sforza, M. Van Helden, M. Yvon, Les insectes de la vigne : Les tordeuses nuisibles à la vigne. In : S. Kreiter, ed. Ravageurs de la vigne. Bordeaux - France : Féret, vol. Deuxième édition, 214-246 (2008).
- [97] L.M. Torres-Vila, J. Stickel, P. Bielza, A. Lacasa, Efecto de la diapausa y del capullo sobre el potencial biotico de la polilla del racimo *Lobesia botrana* Den. y Schiff. (*Lepidoptera : Tortricidae*). *Boletin de Sanidad Vegetal Plagas*, 22 : 27-36 (1996).
- [98] L.M. Torres-Vila, J. Stockel, R. Roehrich et M. C. Rodriguez-Molina, The relation between dispersal and survival of *Lobesia botrana* larvae and their density in vin inflorescences. *Entomologia Experimentalis et Applicata* 84 : 109-114 (1997).
- [99] L.M. Torres-Vila, M.C. Rodrihuez-Molina, R. Roehrich, J. Stockel, Vine phenological stage during larval feeding affects male and female reproductive output of *Lobesia botrana* (Lepidoptera : Tortricidae). *Bulletin Entom. Research*, 89 : 549-556 (1999)
- [100] J. Touzeau, Etude des principaux paramètres biotiques et abiotiques nécessaire à l'établissement d'un modèle d'évolution de l'Eudémis de la vigne (*Lobesia Botrana* SCHIFF.) pour la région Midi-Pyrénées. (1979)
- [101] A. Tran, Télédétection et Epidémiologie : Modélisation de la dynamique de populations d'insectes et application au contrôle de maladies à transmission vectorielle. Thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg 1 (2004).
- [102] J. Vansickle, Attrition in distributed delay models, *IEEE Systems, Man, and Cybernetics Society*, Vol. SMC-7, No. 9, 635-638 (1977)
- [103] P.F. Verhulst, Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et physique*, Tome X, 113-121 (1838).
- [104] H. Von Foerster, Some remarks on changing populations. *Kinetics of Cell Proliferation*, 382-407 (1959).
- [105] K. Wang, J.L. Shipp, Simulation Model for Population Dynamics of *Frankliniella occidentalis* (Thysanoptera : Thripidae) on Greenhouse Cucumber, *Population Ecology*, Vol. 30, No. 6, 1073 :1081 (2001).
- [106] R.S. Walgama, M.P. Zalucki, Evaluation of different models to describe egg and pupal development of *Xyleborus fornicatus* Eichh. (Coleoptera : Scolytidae), the shot-hole borer of tea in Sri Lanka. *Insect Science*, 13 : 109-118 (2006).
- [107] G.F. Webb, Theory of Nonlinear Age-dependent Population Dynamics. *Marcel Dekker*, New York, (1985).
- [108] C. Wiklund, T. fagerström, Why Do Males Emerge before Females? A hypothesis to Explain the Incidence of Protandry in Butterflies. *Oecologia (Berl.)*, 31 : 153-158 (1977).

- [109] S.P. Worner, Performance of Phenological Models Under Variable Temperature Regimes : Consequences of the Kaufmann or rate Summation Effect. *Environmental Entomology*, 21 : 689-699 (1992).
- [110] A. Xuéreb, D. Thiéry, Does natural larval parasitism of *Lobesia botrana* (Lepidoptera : Tortricidae) vary between years, generation, density of the host and vine cultivar. *Bulletin of Entomological Research*, 96 : 105-110 (2006).
- [111] H. Yabe, Local and superlinear convergence of Quasi-Newton methods based on modified secant conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics* , 205 : 617-632 (2007).
- [112] T. Zahavi, H. Ally, D. Thiéry, Can we expect *Lobesia botrana* to distribute its eggs partly using differential exposure of bunches to light ? *IOBC/wprs Bulletin*, 26(8) 135-139 (2003).

### *Résumé*

L'objectif de ce travail de thèse est de développer un modèle mathématique pour l'étude et la compréhension de la dynamique des populations d'un insecte ravageur, l'Eudémis de la vigne (*Lobesia botrana* Den. & Schiff.), dans son écosystème. Le modèle proposé est un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) de type hyperbolique qui décrit les variations numériques au cours du temps de la population en fonction des stades de développement, du sexe des individus et des conditions environnementales. La ressource alimentaire, la température, l'humidité et la prédation sont les principaux facteurs environnementaux du modèle expliquant les fluctuations du nombre d'individus au cours du temps. Les différences de développement qui existent dans une cohorte d'Eudémis sont aussi modélisées pour affiner les prédictions du modèle. A partir de données expérimentales obtenues par les entomologistes de l'INRA, situé à Bordeaux, les paramètres du modèle sont estimés. Ce modèle ainsi ajusté nous permet alors d'étudier quelques aspects biologiques et écologiques de l'insecte comme par exemple l'impact de scénarios climatiques sur la ponte des femelles ou sur la dynamique d'attaque de la vigne par les jeunes larves. Les analyses mathématique et numérique du modèle mathématique et des problèmes d'estimation des paramètres sont développées dans cette thèse.

### *Mots-clés*

Dynamique des populations, population structurée en âge et en stade, EDPs, modèle hyperbolique, estimation des paramètres, méthode de Quasi-Newton, optimisation, contrôle optimal.

### *Title*

**Modeling and parameter estimation related to the reproductive success of the European grapevine moth (*Lobesia botrana* DEN. & SCHIFF.).**

### *Abstract*

The objective of this thesis is to develop a mathematical model to study population dynamics of the European grapevine moth (*Lobesia botrana* Den. & Schiff.) in its ecosystem. The proposed model is a system of hyperbolic equations that describe numerical variations in time of the population with respect to developmental stage, the gender and the environmental conditions. Food, temperature, humidity and predation are the main environmental factors that the model uses to explain population fluctuations in time. Growth differences within an insect cohort were also modeled in order to enhance accuracy of model simulations. Experimental data obtained by entomologists from INRA (National Research Institut of Agronomy) were used to estimate the parameters of the model. With this adjusted model, we studied some biological and ecological aspects of this pest as for example the impact of different climate scenarios on the egg laying or on larvae dynamics, the main actors in the depredation of grape Vine. The mathematical and the numerical analysis of this mathematical model are presented in this thesis and the parameter estimation problems are discussed.

### *Keywords*

Population dynamics, age and growth stage structured population, Partial differential equations, hyperbolic model, parameter estimation problem, Quasi-Newton method, optimisation, optimal control.

### *Disciplines*

Entomologie, Mathématiques appliquées, Informatique.